

3-RRS Paralel Manipülâtörün Dinamik Analizi

H. Tetik*
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü
İzmir

G. Kiper**
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü
İzmir

Özet—Bu çalışmada, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Rasim Alizade Mekatronik Laboratuvarında bulunan, 3-RRS kinematik zincir yapısına sahip 3 serbestlik dereceli bir paralel manipülâtörün dinamik analizi sunulmuştur. Öncelikle ters ve düz konum, hız ve ivme denklemleri verilmiş, ardından bu denklemler kullanılarak oluşturulan ters dinamik model denklemleri sunulmuştur. Ters dinamik analiz virtüel iş prensibi ve Lagrange yöntemleri kullanılarak yapılmıştır ve sonuçlar birbirleri ile karşılaştırılarak doğrulama yapılmıştır. Analitik formülasyonların sonuçları ayrıca SimMechanics® benzetimi oluşturularak doğrulanmış ve benzetim çıktıları sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: paralel manipülâtörler, dinamik analiz, Lagrange yöntemi, virtüel iş yöntemi

Abstract—This study investigates the dynamics of a 3-RRS parallel manipulator which is located at Rasim Alizade Mechatronics Laboratory of Izmir Institute of Technology. The investigated parallel manipulator has 3 degrees-of-freedom. First, both inverse and forward position, velocity and acceleration level kinematic formulations are presented. Then, the inverse dynamics formulations are presented using virtual work and Lagrange methods. The results of the analytical formulations are compared with each other and also confirmed via SimMechanics® simulations.

Keywords: parallel manipulators, dynamic analysis, Lagrange method, virtual work method

I. Giriş

Altıdan daha az serbestlik derecesine sahip (eksiksiz) uzaysal paralel manipülâtörler (PM) pek çok araştırmanın konusu olmuştur. Bu tip PM'ler daha sade mimarileri, daha ucuza mal edilebilmeleri ve daha kolay kontrol edilebilmeleri ile ön plana çıkmaktadırlar [1]. Endüstriyel uygulamaları olan pek çok PM altıdan daha az serbestlik derecesine sahiptir [2].

Bu çalışmada, 3-RRS (R: döner mafsâl, S: küresel mafsâl) kinematik zincir yapısına sahip üç serbestlik dereceli bir uzaysal PM incelenmektedir. Manipülâtörün üç eş bacağı, sabit ve hareketli platformların arasına 120° açı ile simetrik olarak yerleştirilmiştir ve her bir uzun düzlemsel hareket etmektedir. Bu çalışmada parametrik

matematiksel model verilmektedir, ancak sayısal değerler İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Makine Mühendisliği Bölümü Rasim Alizade Mekatronik Laboratuvarında bulunan manipülâtörün (Şekil 1) değerleridir.



Şekil 1. 3-RRS PM

Bu çalışmada 3-RRS PM'ün ters ve düz konum, hız ve ivme analizleri ile dinamik analizi sunulmuştur. Literatürde daha önce bu tip bir PM'ün ters konum analizi yapılmıştır [3]. Düz konum analizi için [4]'te geliştirilen yarı analitik yöntem 3-RRS PM'e uygulanmıştır. [5]'te ise düz konum analizi için tek değişkenli 16. derece çok terimli elde edilerek örnekler ile azami 16 düz kinematik montaj biçimi (aynı girdi takımı için hareketli platformun alabileceği alternatif konumlar) bulunduğu gösterilmiştir.

Pasif mafsallar bulunması nedeniyle, PM'lerin dinamik analizi seri manipülâtörlerden daha zordur. Dinamik analiz için literatürde üç ana yöntem kullanılmıştır: Newton-Euler yaklaşımı, Lagrange yöntemi ve virtüel iş prensibi olarak sıralanabilir [6]. Çeşitli üç serbestlik dereceli PM'lerin ters dinamik analizi için literatürde yukarıda sıralanan bütün yöntemler ile çözümler

* haliltetik@iyte.edu.tr

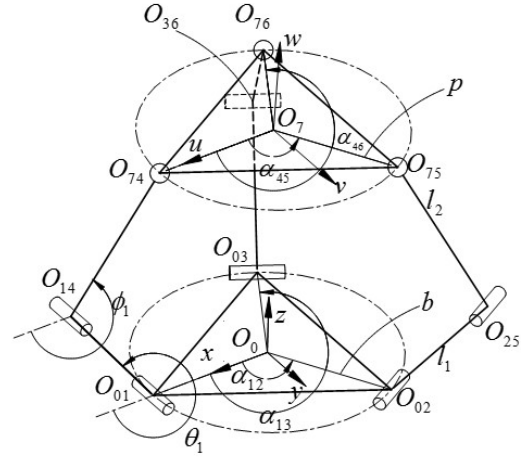
** gokhankiper@iyte.edu.tr

mevcuttur. [7]'de 3-RPS PM'ün Lagrange yöntemi ile dinamik analizi verilmiştir. Bütün mafsal ve hareket uzayı parametrelerini genel koordinat olarak belirlenmiş ve dokuz Lagrange çarpanı kullanılmıştır. Ardından, Lagrange çarpanları elenerek PM için hareket denklemleri türetilmiştir. [8]'de ise aynı tip PM'ün dinamik denklemlerini elde etmek için virtüel iş prensibi kullanılmıştır. [9]'da 3-PRS PM'ün ters dinamik analizi Lagrange yöntemi ile yapılmıştır. Bu çalışmada yalnızca aktif ve pasif mafsal parametreleri genel koordinat olarak atanmış ve ters dinamik analiz için çözüm üretilmiştir. 3-RRS PM'ün ters dinamik analizi [10] ve [11]'de verilmiştir. [10]'da Newton-Euler yaklaşımı tercih edilmiş, dinamik denge denklemleri oluşturulup, hareket için gerekli tahrik torqları hesaplanmıştır. [11]'de ise hem Newton-Euler yaklaşımı hem de virtüel iş prensibi kullanılmıştır. Newton-Euler yaklaşımı ile, mafsallarda sürtünmeyi ihmal ederek denge denklemleri yazılmış ve mafsallarda oluşan tepki kuvvetleri hesaplanmıştır. Ardından, hesaplanmış olan mafsal tepki kuvvetleri kullanılarak, mafsallarda ki sürtünmeler modellenmiş ve hareket için gerekli tahrik torqlarını hesaplamak için virtüel iş prensibi kullanılmıştır.

II. Manipülatörün Geometrisi ve Kütle Dağılımı

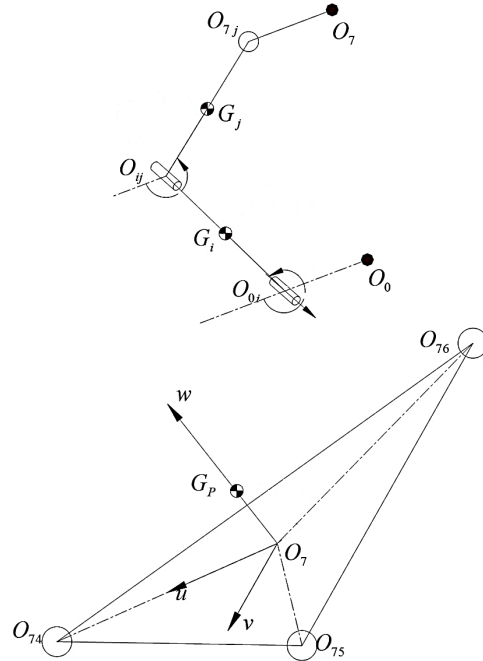
Bu çalışmada incelenen 3-RRS PM'de her bacak sabit platforma bir aktif döner mafsal (R) ile, hareketli platforma ise bir küresel mafsal (S) ile bağlıdır. Bacaklardaki iki uzuv ise birbirlerine birer pasif döner mafsal (R) ile bağlıdır. Her bir bacadaki iki döner mafsal eksenleri birbirine paraleldir ve bu eksenler, sabit platformun çevrel çemberine teğettir. Bu durum, uzuvların düzlemsel hareket etmesini sağlar. Sabit ve hareketli platformlar eşkenar üçgen şeklindedir ve bacaklar platformlara bu üçgenlerin köşelerinden bağlıdır. Sabit platformun köşelerine aktif döner mafsallar yerleştirilmiştir ve hareket için gerekli tahrik burardan verilmektedir. Hareketli platformun köşelerinde ise küresel mafsallar bulunmaktadır. Sabit platform üçgen merkezine O_0 -xyz, hareketli platform üçgenin merkezine de O_7 -uvw eksen takımları atanmıştır.

Şekil 2'de aktif ve pasif döner mafsal eksenlerinin bacak düzlemleri ile kesişim noktaları sırası ile O_{0i} ve O_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = i + 3$), küresel mafsal merkezleri ise O_{7j} ile gösterilmiştir. Sabit platformun çevrel çemberinin yarıçapı $|O_0O_{0i}| = b$, hareketli platformunki ise $|O_7O_{7j}| = p$ dir. Her uzuvdaki alt bacağın uzunluğu $|O_{1i}O_{ij}| = l_1$, üst bacağın uzunluğu ise $|O_{ij}O_{7j}| = l_2$ dir. Sabit platforma atanmış O_0 -xyz eksen takımının x eksenini, $\overrightarrow{O_0O_{01}}$ doğrultusunda, hareketli platforma atanmış O_7 -uvw eksen takımının u eksenini ise O_7O_{74} doğrultusundadır. $\alpha_{12} = \angle O_{01}O_0O_{02} = \alpha_{45} = \angle O_{74}O_7O_{75} = 120^\circ$ ve $\alpha_{13} = \angle O_{01}O_0O_{03} = \alpha_{46} = \angle O_{74}O_7O_{76} = 240^\circ$ dir. Aktif döner mafsal açıları, θ_i , ve pasif döner mafsal açıları, ϕ_i , xy-düzleminde ölçülmektedir.



Şekil 2. 3-RRS PM'ün Geometrisi

Bir alt bacağın kütle merkezini aktif döner mafsal eksenine uzaklığı $|O_{1i}G_i| = d_1$, bir üst bacağın kütle merkezini pasif döner mafsal eksenine uzaklığı ise $|O_{ij}G_j| = d_2$ dir (Şekil 3). Hareketli platformun kütle merkezini w eksen boyunca O_7 'den uzaklığı ise $|O_7G_p| = d_p$ dir. Alt bacakların her birinin kütlesi m_1 , üst bacaklarınki m_2 , Platformun kütlesi ise m_p dir. Alt ve üst bacakların kütle merkezlerinde uzuvların dönme eksenleri etrafındaki atalet momentleri sırası ile I_1 ve I_2 dir. Platformun kütle merkezinde uvw eksen takımında tanımlı atalet moment matrisi ise I_p dir.



Şekil 3. 3-RRS PM'ün Kütle Merkezleri

Hareketli platform merkezinin O_0 -xyz eksen takımındaki koordinatları şu şekildedir:

$$\bar{O}_7 = [O_{7,x} \quad O_{7,y} \quad O_{7,z}]^T \quad (1)$$

Hareketli platformun sabit platforma göre yönelimi ise x - y - z Euler açıları ile tanımlanan bir dönme matrisi olarak oluşturulmuştur:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_y c_z & -c_y s_z & s_y \\ s_x s_y c_z + c_x s_z & c_x c_z - s_x s_y s_z & -s_x c_y \\ s_x s_z - c_x s_y c_z & s_x c_z + c_x s_y s_z & c_x c_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

c ve s kosinüs ve sinüs; alt indis x , y ve z ise dönme açıları ψ_x , ψ_y ve ψ_z 'yi temsil eder. Bu çalışmada incelenen PM üç serbestlik derecelidir. 6 adet işlem uzayı parametresinden ($t = [O_{7,x} \quad O_{7,y} \quad O_{7,z} \quad \psi_x \quad \psi_y \quad \psi_z]^T$) üç tanesi serbest olarak seçilebilir ve kalan üçü kısıt denklemleri kullanılarak bulunur. Kısıt denklemleri, bacakların düzlemsel hareketi kullanılarak elde edilmektedir. Manipülatörün hareket kabiliyeti göz önüne alındığında, $O_{7,z}$, ψ_x ve ψ_y 'nin bağımsız işlem uzayı parametreleri olmaları tercih edilmiştir. Kısıt denklemleri aşağıda verilmiştir. Bu denklemlerin türetilmesi ise [5]'te verilmiştir.

$$O_{7,x} = p(u_x - v_y)/2 \quad (3)$$

$$O_{7,y} = -pu_y \quad (4)$$

$$u_x = v_y \Rightarrow \psi_z = \tan^{-1}(-s_x s_y / (c_x + c_y)) \quad (5)$$

II. Kinematik Analiz

3-RRS PM'ün konum seviyesinde düz ve ters kinematik analizi detaylı olarak [5]'de verilmiştir. Yine de, dinamik analizde kinematik analiz sonuçları kullanıldığından burada kısaca üzerinden geçilmiştir.

A. Ters kinematik analiz

3-RRS PM'ün ters kinematik analizi için, hareketli platformun verilen bir konumu için gerekli olan aktif mafsalları bulunur. Bunun için küresel mafsalların konumları, verilen işlem uzayı parametreleri ve bilinmeyen mafsalları değişkenleri cinsinden ifade edilir:

$$\bar{O}_{7j} = \bar{O}_j + \mathbf{RZ}(\alpha_{4j}) \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}(\alpha_{1i}) \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{Y}(\theta_i) \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{Y}(\phi_i) \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$\mathbf{Z}()$, z eksenini etrafında, $\mathbf{Y}()$ ise y eksenini etrafında dönme matrisini ifade eder. $\alpha_{11} = \alpha_{44} = 0$ dir. Denklem (6) x , y ve z bileşenlerine ayrılıp yazıldığında:

$$\begin{aligned} x: \quad O_{7j,x} &= c\alpha_{1i}(b + l_1 c\theta_i + l_2 c\phi_i) \\ y: \quad O_{7j,y} &= s\alpha_{1i}(b + l_1 c\theta_i + l_2 c\phi_i) \\ z: \quad O_{7j,z} &= -l_1 s\theta_i - l_2 s\phi_i \end{aligned} \quad (7)$$

Denklem (7)'den pasif döner mafsalları parametresi ϕ_i elenip yarım açı çevrimi ($s\theta_i = 2t_i/(1+t_i^2)$, $c\theta_i = (1-t_i^2)/(1+t_i^2)$) ile aktif mafsalları parametresi θ_i bulunur:

$$A_i c\theta_i + B_i s\theta_i + C_i = 0 \rightarrow \theta_i = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-B_i \pm \sqrt{A_i^2 + B_i^2 - C_i^2}}{C_i - A_i} \right) \quad (8)$$

Denklem (8)'de $A_i = 2l_1 c\alpha_{1i}(bc\alpha_{1i} - O_{7j,x})$, $B_i = 2l_1 O_{7j,z} c^2\alpha_{1i}$ ve $C_i = O_{7j,x}^2 - 2bO_{7j,x}c\alpha_{1i} + c^2\alpha_{1i}(b^2 + l_1^2 - l_2^2 + O_{7j,z}^2)$ dir. Pasif R mafsalları parametresi şöyle bulunur:

$$\phi_i = \text{atan2} \left(\frac{O_{7j,x} - c\alpha_{1i}(b + l_1 c\theta_i)}{c\alpha_{1i}}, -O_{7j,z} - l_1 s\theta_i \right) \quad (9)$$

Denklem (6)-(9)'daki işlemler her bacak için ($i = 1, 2, 3$) tekrar edilir.

B. Düz kinematik analiz

Düz kinematik analizde, küresel mafsalların konumları, Denklem (6)'da verilen sadece mafsalları değişkenleri cinsinden hesaplanır. Ardından, herhangi iki S mafsalları arasındaki sabit uzaklıklar kullanılarak üç adet kısıt denklemleri yazılır:

$$3p^2 = d^2 = |O_{74}O_{75}|^2 \rightarrow f_1(\phi_1, \phi_2) = 0 \quad (10)$$

$$3p^2 = d^2 = |O_{75}O_{76}|^2 \rightarrow f_2(\phi_2, \phi_3) = 0 \quad (11)$$

$$3p^2 = d^2 = |O_{76}O_{74}|^2 \rightarrow f_3(\phi_3, \phi_1) = 0 \quad (12)$$

(10) ve (11) numaralı denklemler ϕ_2 cinsinden yeniden düzenlendiğinde:

$$f_{10} + f_{11} s\phi_2 + f_{12} c\phi_2 = 0 \quad (13)$$

$$f_{20} + f_{21} s\phi_2 + f_{22} c\phi_2 = 0 \quad (14)$$

elde edilir. Denklem (13)-(14) ϕ_2 için çözüldüğünde:

$$s\phi_2 = \frac{f_{12}f_{20} - f_{10}f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \quad c\phi_2 = \frac{f_{10}f_{21} - f_{11}f_{20}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \quad (15)$$

bulunur. Denklem (15) ve $c^2\phi_2 + s^2\phi_2 = 1$ eşitliği kullanılarak ($f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} \neq 0$ için):

$$(f_{12}f_{20} - f_{10}f_{22})^2 + (f_{10}f_{21} - f_{11}f_{20})^2 - (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})^2 = 0 \quad (16)$$

elde edilir. Denklem (12) ve (16) ϕ_1 ve ϕ_3 cinsindedir. ϕ_1 ve ϕ_3 için yarım açı çevrimi uygulandığında ve t_1 için düzenlendiğinde aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a_0 + a_1t_1 + a_2t_1^2 + a_3t_1^3 + a_4t_1^4 = 0 \quad (17)$$

$$b_0 + b_1t_1 + b_2t_1^2 = 0 \quad (18)$$

Denklem (17)'de t_1 'in katsayıları 4. dereceden, Denklem (18)'de ise 2. dereceden t_3 'ün fonksiyonlarıdır. Denklem (17)-(18), çokterimli bölümü yapılarak t_1 'den arındırıldığında:

$$\frac{b_2^3 H}{[a_4b_1^3 - b_1(2a_4b_0 + a_3b_1)b_2 + (a_3b_0 + a_2b_1)b_2^2 - a_4b_2^3]^2} = 0 \Rightarrow H = 0 \quad (19)$$

Denklem (19)'da verilen H şu şekildedir:

$$H = a_4 \left\{ a_4b_0^4 + b_1 \left[-a_3b_0^3 + b_1(a_2b_0^2 - a_1b_0b_1 + a_0b_1^2) \right] \right\} \\ + b_2^2 \left[(a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4)b_0^2 + (-a_1a_2 + 3a_0a_3)b_0b_1 + a_0a_2b_1^2 \right] \\ + (-a_2a_3 + 3a_1a_4)b_0^2b_1 + (a_1a_3 - 4a_0a_4)b_0b_1^2 - a_0a_3b_1^3 \\ + b_2(a_3^2 - 2a_2a_4)b_0^3 + b_2^3 \left[(a_1^2 - 2a_0a_2)b_0 - a_0a_1b_1 \right] + a_0^2b_2^4$$

H , t_3 cinsinden 16. dereceden bir çok terimlidir. Bu çok terimliden nümerik olarak t_3 bulunduğunda, sırasıyla ϕ_3 , ϕ_2 ve ϕ_1 rahatlıkla bulunabilir. Elde edilen pasif mafsalsal parametreleri kullanılarak hareketli platformun konumu Denklem (6) ile hesaplanır.

C. Hız ve ivme analizi

Hız denklemlerini yazmak için, denklem (3)-(9)'un zamana göre türevleri alınır. Öncelikle bağımlı işlem uzayı hızları $\dot{O}_{7,x}$, $\dot{O}_{7,y}$ ve $\dot{\psi}_z$ bağımsız olan hızlar ($\dot{\vec{x}} = [\dot{O}_{7,z} \ \dot{\psi}_x \ \dot{\psi}_y]^T$) cinsinden ifade edilir:

$$\begin{aligned} O_{7,x} &= \mathbf{J}_{O_{7,x}} \bar{\vec{x}} \\ O_{7,y} &= \mathbf{J}_{O_{7,y}} \bar{\vec{x}} \\ \psi_z &= \mathbf{J}_{\psi_z} \bar{\vec{x}} \end{aligned} \quad (20)$$

$\mathbf{I}_{3 \times 3}$, 3×3 'lük birim matrisi ifade eder. Ardından, her bir küresel mafsalsal merkezinin doğrusal hızı, işlem uzayı hızları cinsinden ($\bar{\vec{t}} = [\dot{O}_{7,z} \ \dot{\psi}_x \ \dot{\psi}_y]^T$) ifade edilir:

$$\bar{O}_{7_j} = \mathbf{J}_{x,O_{7_j}} \bar{\vec{x}} \quad (21)$$

Son olarak aktif ve pasif döner mafsalsal hızları, işlem uzayı hızları cinsinden ifade edilir:

$$\theta_i = \mathbf{J}_{O_{7_j}, \theta_i} \bar{O}_{7_j} = \mathbf{J}_{O_{7_j}, \theta_i} \mathbf{J}_{x,O_{7_j}} \bar{\vec{x}} = \mathbf{J}_{x, \theta_i} \bar{\vec{x}} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \phi_i &= \mathbf{J}_{\theta_i, \phi_i} \theta_i + \mathbf{J}_{O_{7_j}, \phi_i} \bar{O}_{7_j} \\ &= \left(\mathbf{J}_{\theta_i, \phi_i} \mathbf{J}_{O_{7_j}, \theta_i} + \mathbf{J}_{O_{7_j}, \phi_i} \right) \mathbf{J}_{x, O_{7_j}} \bar{\vec{x}} = \mathbf{J}_{x, \phi_i} \bar{\vec{x}} \end{aligned} \quad (23)$$

Alt bacak kütle merkezlerinin hızları şu şekilde ifade edilebilir:

$$\bar{G}_i = \mathbf{J}_{\theta_i, G_i} \theta_i = \mathbf{J}_{\theta_i, G_i} \mathbf{J}_{x, \theta_i} \bar{\vec{x}} = \mathbf{J}_{x, G_i} \bar{\vec{x}} \quad (24)$$

Üst bacak kütle merkezlerinin hızları aktif ve pasif döner mafsalsal hızları cinsinden şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \bar{G}_j &= \mathbf{J}_{\theta_i, G_j} \theta_i + \mathbf{J}_{\phi_i, G_j} \phi_i \\ &= \left(\mathbf{J}_{\theta_i, G_j} \mathbf{J}_{x, \theta_i} + \mathbf{J}_{\phi_i, G_j} \mathbf{J}_{x, \phi_i} \right) \bar{\vec{x}} = \mathbf{J}_{x, G_j} \bar{\vec{x}} \end{aligned} \quad (25)$$

Hareketli platformun kütle merkezinin doğrusal hızı işlem uzayı hızları cinsinden şöyle ifade edilir:

$$\bar{G}_p = \bar{O}_7 + \mathbf{J}_{\psi, G_p} \bar{\psi} = \left(\mathbf{J}_{x, O_7} + \mathbf{J}_{\psi, G_p} \mathbf{J}_{x, \psi} \right) \bar{\vec{x}} = \mathbf{J}_{x, G_p} \bar{\vec{x}} \quad (26)$$

Hareketli platformun sabit platforma göre açısalsal hızı ise şu şekilde verilir:

$$\bar{\omega}_p = \mathbf{J}_{x, \omega} \bar{\vec{x}} \quad (27)$$

İvme denklemlerini yazmak için ise, yukarıda verilmiş olan hız denklemlerinin zamana göre türevleri alınabilir. Denklem (20)-(27)'de kullanılan Jakoby matrislerinin ayrıntıları ile ivme denklemlerinin tamamı [12]'de verilmiştir.

IV. Dinamik Analiz

Dinamik analiz denklemlerini çıkarmak ve doğrulamak için hem virtüel iş prensibi, hem de Lagrange yöntemi kullanılmıştır.

A. Virtüel iş prensibi

Öncelikle sisteme etki eden atalet kuvvetleri ile dış kuvvetler yazılmalıdır. Alt ve üst bacaklar ile platformun atalet ve yerçekimi kuvvetleri şöyle hesaplanabilir:

$$\bar{F}_i^{at} = m_1 \left(\bar{\vec{g}} + \bar{G}_i \right) \quad (28)$$

$$\bar{F}_j^{at} = m_2 \left(\bar{\vec{g}} + \bar{G}_j \right) \quad (29)$$

$$\bar{F}_p^{at} = m_p (\bar{g} + \bar{G}_p) \quad (30)$$

$\bar{g} = [0 \ 0 \ -9.81]^T$ m/s² dir. Alt ve üst bacaklar ile platformda oluşan toplam atalet momentleri:

$$\bar{M}_1^{at} = I_1 [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T \quad (31)$$

$$\bar{M}_2^{at} = I_2 [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]^T \quad (32)$$

$$\bar{M}_p^{at} = \mathbf{I}_p \bar{\alpha}_p \quad (33)$$

$\bar{\alpha}_p$ hareketli platformun O_0 -xyz eksen takımına göre açılal ivmesidir ve Denklem (27)'nin zamana göre türevi alınarak bulunur.

Ayrıca aktif döner mafsallardan uygulanan tahrik torkları ($\bar{\tau}^a = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$) ile hareketli platforma atanmış koordinat sisteminin merkezine etki ettiği varsayılan bir dış kuvvet ($\bar{F}_p^{dts} = [F_x^{dts} \ F_y^{dts} \ F_z^{dts}]^T$) mevcuttur. Sürtünmeler ihmal edilmiştir.

Virtüel iş prensibi kullanarak 3-RRS PM'nin ters dinamik analizi için gerekli denklem şu şekilde yazılabilir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}^T \bar{\tau}^a + \bar{O}_7^T \bar{F}_p^{dts} + \bar{G}_p^T \bar{F}_p^{at} + \bar{\omega}_p^T \bar{M}_p^{at} \\ + \sum_{i=1}^3 \bar{G}_i^T \bar{F}_i^{at} + \sum_{j=4}^6 \bar{G}_j^T \bar{F}_j^{at} + \bar{\theta}^T \bar{M}_1^{at} + \bar{\phi}^T \bar{M}_2^{at} \end{array} \right\} = 0 \quad (34)$$

Denklem (34)'teki hız terimleri, bağımsız işlem uzayı hızları cinsinden yazıldığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\bar{x}^T \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J}_{x,\theta}^T \bar{\tau}^a + \mathbf{J}_{x,O_7}^T \bar{F}_p^{dts} + \mathbf{J}_{x,G_p}^T \bar{F}_p^{at} + \mathbf{J}_{x,\omega_p}^T \bar{M}_p^{at} \\ + \sum_{i=1}^3 \mathbf{J}_{x,G_i}^T \bar{F}_i^{at} + \sum_{j=4}^6 \mathbf{J}_{x,G_j}^T \bar{F}_j^{at} + \mathbf{J}_{x,\theta}^T \bar{M}_1^{at} + \mathbf{J}_{x,\phi}^T \bar{M}_2^{at} \end{array} \right\} = 0 \quad (35)$$

Bilinen dış kuvvetler ve hareket için tahrik torkları şu şekilde bulunur:

$$\bar{\tau}^a = -(\mathbf{J}_{x,\theta}^T)^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J}_{x,O_7}^T \bar{F}_p^{dts} + \mathbf{J}_{x,G_p}^T \bar{F}_p^{at} + \mathbf{J}_{x,\omega_p}^T \bar{M}_p^{at} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{J}_{x,G_i}^T \bar{F}_i^{at} \\ + \sum_{j=4}^6 \mathbf{J}_{x,G_j}^T \bar{F}_j^{at} + \mathbf{J}_{x,\theta}^T \bar{M}_1^{at} + \mathbf{J}_{x,\phi}^T \bar{M}_2^{at} \end{array} \right\} \quad (36)$$

B. Lagrange yöntemi

n nolu genelleştirilmiş koordinat için Lagrange denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial q_n} = L_n - Q_n^* \quad (37)$$

Denklem (37)'da verilen λ_k Lagrange çarpanı, Γ_k Denklem (6)'da verilen 9 adet kısıt denklemi, q_n n nolu genelleştirilmiş koordinat, $L_n = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n}$, Lagrange fonksiyonu ve Q_n^* ise n nolu genelleştirilmiş kuvvettir. PM için tüm mafsal değişkenleri ($\bar{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$, $\bar{\phi} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]^T$) ve işlem uzayı parametreleri ($\bar{O}_7 = [O_{7,x} \ O_{7,y} \ O_{7,z}]^T$, $\bar{\psi} = [\psi_x \ \psi_y \ \psi_z]^T$) genelleştirilmiş koordinatlar olarak alınmıştır. Yani genelleştirilmiş koordinatlar $\bar{q} = [\bar{\theta} \ \bar{\phi} \ \bar{O}_7 \ \bar{\psi}]^T$ şeklindedir.

Lagrange fonksiyonunu yazabilmek için, kinetik ve potansiyel enerji ifadeleri oluşturulmalıdır. $i = 1, 2, 3$ için i nolu alt bacağın potansiyel ve kinetik enerjileri:

$$PE_i = -gd_1 s \theta_i \quad KE_i = \frac{1}{2} (I_i + m_i d_1^2) \theta_i^2 \quad (38)$$

i nolu üst bacağın potansiyel ve kinetik enerjileri:

$$\begin{aligned} PE_j &= -g(l_1 s \theta_j + d_2 s \phi_j) \\ KE_j &= \frac{1}{2} [m_2 l_1^2 \theta_j^2 + (I_2 + m_2 d_2^2) \phi_j^2 + 2m_2 l_1 d_2 c(\theta_j - \phi_j) \theta_j \phi_j] \end{aligned} \quad (39)$$

Hareketli platformun potansiyel ve kinetik enerjileri:

$$\begin{aligned} PE_p &= -g(O_{7,z} + d_p c_x c_y) \\ KE_p &= \frac{1}{2} (m_p \bar{G}_p^2 + \bar{\omega}_p^T \mathbf{I}_p \bar{\omega}_p) \end{aligned} \quad (40)$$

Enerji ifadeleri elde edildikten sonra, Lagrange fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$L = \sum KE - \sum PE \quad (41)$$

(37) numaralı denklemde $n = 1, 2, 3$ için genelleştirilmiş kuvvetler tahrik torkları ($\bar{\tau}^a$) ve $n = 7, 8, 9$ için ise hareketli platforma etki eden dış kuvvetlerdir (\bar{F}_p^{dts}). Amaç tahrik torklarını dış kuvvetler ve hareket parametreleri cinsinden elde etmek olduğu için, öncelikle 9 adet ($n = 4, 5, \dots, 12$) Lagrange denklemi yazılıp Lagrange çarpanları bulunur:

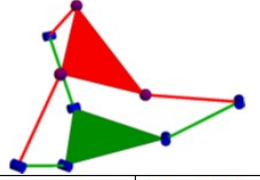
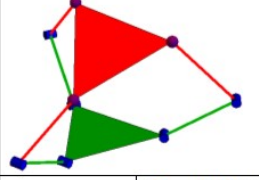
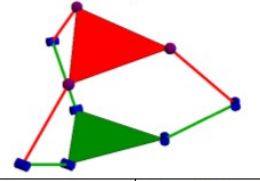
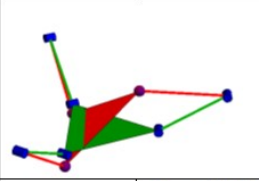
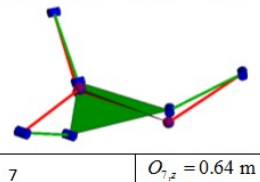
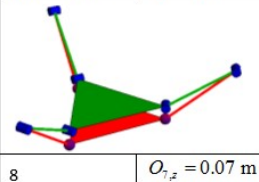
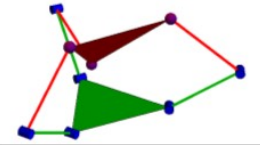
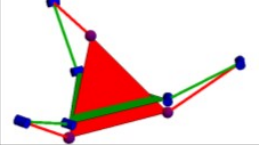
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \Gamma_1 / \partial \phi_1 & \partial \Gamma_9 / \partial \phi_1 \\ \partial \Gamma_1 / \partial \psi_z & \partial \Gamma_9 / \partial \psi_z \end{pmatrix}_{9 \times 9}^{-1} \begin{pmatrix} L_4 \\ L_7 - F_x^{dts} \\ L_8 - F_y^{dts} \\ L_9 - F_z^{dts} \\ L_{12} \end{pmatrix} \quad (42)$$

Bilinen Lagrange çarpanları kullanılarak Lagrange denklemi $n = 1, 2, 3$ için yazıldığında, gerekli tahrik torkları bulunur:

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\Gamma_1/\partial\theta_1 & \partial\Gamma_9/\partial\theta_1 \\ \partial\Gamma_1/\partial\theta_2 & \partial\Gamma_9/\partial\theta_2 \\ \partial\Gamma_1/\partial\theta_3 & \partial\Gamma_9/\partial\theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_9 \end{pmatrix} \quad (43)$$

V. Örnek ve Benzetimler

Benzetimlerde kullanılan PM'ün yapısal parametreleri şöyledir: $l_1 = 700$ mm, $l_2 = 775$ mm, $b = p = 544$ mm, $d_1 = 200$ mm, $d_2 = 420$ mm, $d_p = 150$ mm, $m_1 = 28.55$ kg, $m_2 = 25.32$ kg, $m_p = 35.87$ kg, $I_1 = 2.02$ kg·m², $I_2 = 2.09$ kg·m², $I_p = [0.27, 0, 0; 0, 0.27, 0; 0, 0, 0.54]$ kg·m².

1	$O_{7,x} = 0.76$ m	2	$O_{7,x} = 0.83$ m
$\psi_x = -40.07^\circ$	$\psi_y = -9.83^\circ$	$\psi_x = -9.07^\circ$	$\psi_y = 32.81^\circ$
			
3	$O_{7,x} = 0.9$ m	4	$O_{7,x} = 0.05$ m
$\psi_x = -10^\circ$	$\psi_y = 15^\circ$	$\psi_x = 34.71^\circ$	$\psi_y = 19.57^\circ$
			
5	$O_{7,x} = 0.04$ m	6	$O_{7,x} = -0.12$ m
$\psi_x = -1.05^\circ$	$\psi_y = -35.9^\circ$	$\psi_x = -1.46^\circ$	$\psi_y = 1.73^\circ$
			
7	$O_{7,x} = 0.64$ m	8	$O_{7,x} = 0.07$ m
$\psi_x = 41.79^\circ$	$\psi_y = -18.36^\circ$	$\psi_x = -43.87^\circ$	$\psi_y = 22.21^\circ$
			

Şekil 4. Düz Kinematik Analiz Sonuçları

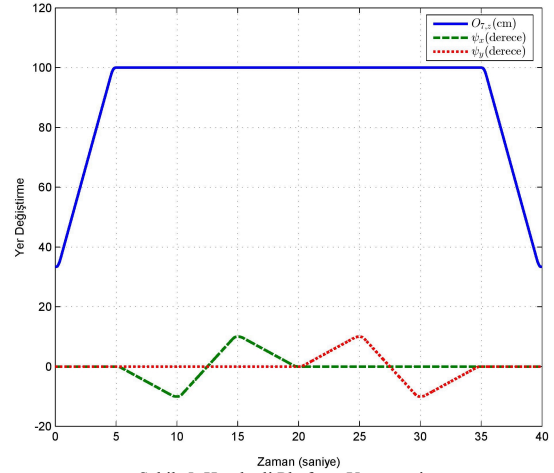
Geliştirilmiş olan ters ve düz kinematik modelin doğrulanması için Mathematica® kullanılmıştır. Öncelikle

hareketli platformun $O_{7,z} = 900$ m, $\psi_x = -10^\circ$ ve $\psi_y = 15^\circ$ olduğu konumda gerekli aktif döner mafsalları için en fazla sekiz çözüm vardır. Yapılan hesabın doğrulanması için elde edilen çözümlerden biri ($\theta_1 = -27.83^\circ$, $\theta_2 = -32.39^\circ$, $\theta_3 = -43.99^\circ$ ve $\theta_4 = -139.15^\circ$), yani toplam sekiz çözüm vardır. Yapılan hesabın doğrulanması için elde edilen çözümlerden biri ($\theta_1 = -27.83^\circ$, $\theta_2 = -32.39^\circ$ ve $\theta_3 = -43.99^\circ$) yine Mathematica® da oluşturulan düz kinematik modeline girdi olarak verilmiş, bu girdilerle hareketli platformun konumları hesaplanmıştır (Şekil 4).

Nümerik olarak çözülen çok terimli 16. dereceden olduğu için, bilinen aktif döner mafsalları için en fazla 16 farklı hareketli platform konumu mevcuttur. Bu örnekte 8 gerçel kök bulunmuştur. Şekil 4'te verilmiş olan 3. çözümün, ters kinematik girdileriyle eşleşiyor olması, türetilen denklemlerin doğruluğunu işaret etmektedir.

Dinamik benzetimlerde, O_7 noktasına uygulanan bir dış kuvvet ile, hareketli platformun merkezinden w eksenli üzerinde 250 mm kadar uzakta olan bir yük olduğu varsayılmıştır. Dış kuvvet $\vec{F}_p^{dis} = [100 \ 200 \ 150]^T$ N; yükün kütlesi $m_L = 50$ kg ve atalet matrisi $I_L = [1, 0, 0; 0, 0.7, 0; 0, 0, 1.3]$ kg·m² olarak alınmıştır.

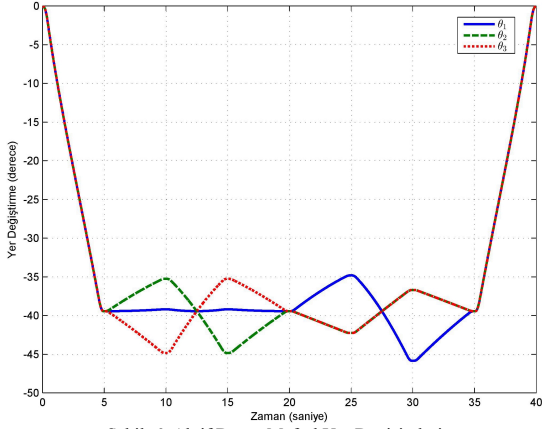
Ters dinamik denklemlerinin sayısal olarak hesaplanabilmesi için, hareketli platforma Şekil 5'teki gibi bir yörünge tasarlanmıştır. Bu yörünge tasarlanırken, sayısal hataların olabildiğince küçültülebilmesi için ivme sürekli olacak şekilde geçişler kullanılmıştır.



Şekil 5. Hareketli Platform Yörüngesi

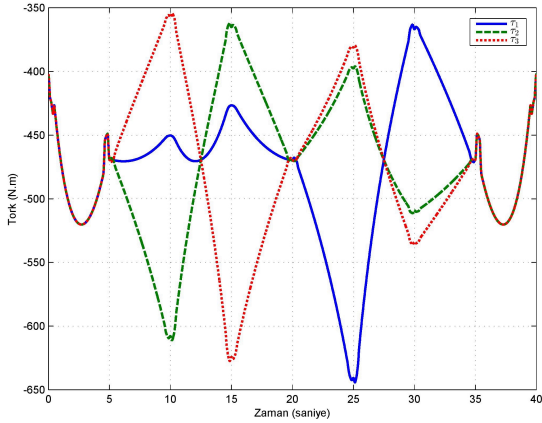
Hareketli platformun Şekil 5'te verilen yörüngeyi takip edebilmesi için gerekli olan aktif döner mafsalları için gerekli olan ters kinematik denklemleri kullanılarak hesaplanmıştır ve Şekil 6'da sunulmuştur.

Ayrıca bütün mafsalların hız ve ivme değerleri de hesaplanmıştır [12]. Bütün hız ve ivme profilleri elde edildikten sonra tahrik torkları, verilen her iki metot kullanılarak hesaplanmıştır (Şekil 7). Elde edilen tahrik torku değerleri birbirleriyle örtüştüğü için Şekil 7'de yalnızca bir yöntemin sonuçları verilmiştir.

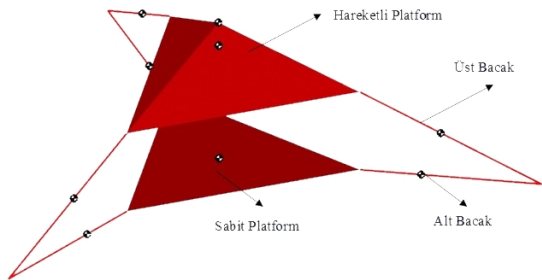


Şekil 6. Aktif Döner Mafsal Yer Değişimleri

Ayrıca yapılmış olan analiz doğrulanması için, SimMechanics® blokları kullanılarak 3-RRS PM'ün dinamik modeli oluşturulmuş ve Şekil 6'da verilmiş olan aktif mafsal yer değişim değerleri mafsal hareket girdisi olarak sisteme verilmiştir. SimMechanics® bloklarıyla oluşturulmuş olan 3-RRS PM Şekil 8'de verilmiştir.



Şekil 7. Tahrik Torkları



Şekil 8. 3-RRS PM SimMechanics® Modeli

Aktif döner mafsalara verilen hareket girdisi ile sistem hareket ettirilmiş ve mafsal algılayıcıları kullanılarak, istenilen yörünge için gerekli tahrik torkları hesaplanmıştır. Algılayıcılardan alınan tahrik torku değerleri Şekil 7'de hesaplanmış değerlerle örtüşmektedir.

VI. Sonuçlar

Bu çalışmada 3-RRS PM'ün ters ve düz konum, hız ve ivme analizleri ile ve ters dinamik analizi verilmiştir. Önce verilen bir hareketli platform konumu için ters kinematik çözümü yapılmış, ardından da ters kinematik analizde elde edilen sonuçlar, düz kinematik modelde girdi olarak kullanılarak geliştirilmiş olan modeller doğrulanmıştır.

Ters dinamik analiz için hem virtüel iş prensibi, hem de Lagrange yöntemi kullanılmış; ayrıca SimMechanics® modeli ile model doğrulanmıştır. Dinamik model ileriki çalışmalarda manipülâtörün denetimi için kullanılacaktır.

Teşekkür

Bu çalışma 115E726 nolu TÜBİTAK 1003 projesi kapsamında desteklenmektedir.

Kaynakça

- [1] Fan C., Liu H. ve Zhang Y. Kinematics and singularity analysis of a novel 1T2R fully-decoupled parallel mechanism. Intelligent Computing and Intelligent Systems, 2:312-316, 2009.
- [2] Chen X., Liu X-J., Xie F. ve Sun T. A comparison study on motion/force transmissibility of two typical 3-dof parallel manipulators: the Sprint Z3 and A3 tool heads. International Journal of Advanced Robotic Systems, 11(1), 2014, doi: 10.5772/57458
- [3] Li J., Wang J., Chou W., Zhang Y., Wang T. ve Zhang Q. Inverse kinematics and dynamics of the 3-rrs parallel platform. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 3:2506-2511, Seoul, Kore, 21-26 Mayıs 2001.
- [4] Srivatsan R. A. ve Bandyopadhyay S. On the position kinematic analysis of MaPaMan: a reconfigurable three-degrees-of-freedom spatial parallel manipulator. Mechanism and Machine Theory, 62: 150-165, 2013.
- [5] Tetik H., Kalla R., Kiper G. ve Bandyopadhyay S. Position Kinematics of a 3-RRS Parallel Manipulator. ROMANSY 21 - Robot Design, Dynamics and Control. CISM International Centre for Mechanical Sciences, Cilt 569, Springer, 2016.
- [6] Staicu Ş. Inverse dynamics of the spatial 3-RPS parallel robot, Proceeding of the Romanian Academy, Series A, 13(1):62-70, 2012.
- [7] Pendar H., Wakil M. ve Zohoor H. Efficient dynamic equations of 3-RPS parallel mechanism through Lagrange method. IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, 2:1152-1157, Singapur, 1-3 Aralık 2004.
- [8] Sokolov A. ve Xirouchakis P. Dynamics analysis of a 3-DOF parallel manipulator with R-P-S joint structure. Mechanism and Machine Theory, 42(5):541-557, 2007.
- [9] Li Y. ve Xu Q. Kinematics and inverse dynamics analysis for a general 3-PRS spatial parallel mechanism. Robotica, 23(2):219-229, 2005.
- [10] Jianfeng L., Jinsong W., Wusheng C., Yuru Z., Tianmiao W. ve Z. Qixian. Inverse kinematics and dynamics of the 3-RRS parallel platform IEEE International Conference on Robotics and Automation, 3:2506-2511, Seoul, Kore, 21-26 Mayıs 2001.
- [11] Itul T. ve Pisla D. On the kinematics and dynamics of 3-DOF parallel robots with triangle platform. Journal of Vibroengineering, 11(1):188-200, 2009.
- [12] Tetik H. Modelling and Control of a 3-RRS Parallel Manipulator, Yüksek Lisans Tezi, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, 2016.