Rank Kestirim Yöntemi Kullanarak SVD Tabanlı Gürültü Filtreleme
SVD Based Noise Reduction Using Rank Estimation Method

M.Emre ÇEK, F.Acar SAVACI İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, İzmir
E Mail: {emrecek,acarsavaci}@iyte.edu.tr
Tel:0-232-750 6511/6568

Özetçe

Bu çalışmada, gürültülü verilere ilişkin matrisin tekil değer ayrıştırması yapıldıktan sonra, rankının kestirimi yapılarak gürültünün indirgenmesi için bir algoritma verilmiştir. Burada yapılan çalışmada varolan yöntemlerden farklı olarak, rank kestirimi, birbirinin ardışığı olan tekil değerler arasındaki oran karşılaştırılarak yapılmıştır.

Abstract

In this paper, an algorithm which performs the singular values decomposition of a noisy matrix has been presented in order to make noise reduction by rank estimation of the noise free data matrix.
In this study the rank estimation methodis done by finding ratios of among all consecutive singular values and selecting the maximum of these ratios as the noise threshold.

I. Giriş

Fiziksel sistemlerin çoğunda, gözlenmiş olan deneysel verilere gürültü karışmıştır. Eğer gözlenen deterministik işaret dar bandlıysa, doğrusal filtreleme yöntemleri ile geniş bandlı rastlantısal işaretler "gürültü", bu tip dar bandlı deterministik işaretlerden ayrıştırılabilir. Doğrusal filtreler kullanarak, düşük boyutlu ve geniş bandlı olan deterministik işaretleri, geniş bandlı yüksek boyutlu rastlantısal işaretlerden ayırmak mümkün değildir [7].
Geniş bandlı deterministik işaretler (kaotik işaretler) ile gürültüyü ayrıştırmak [1,2]'de SVD tabanlı gürültü indirgeme yöntemlerine dayanarak verilmiştir. Burada varyansın %95'ine karşı düşen tekil değerlerin dışındakiler gürültüye karşılık gelir. [3,4]'de en küçük özdeğerleri kullanarak bulunan varyans kestiriminden hareket edilerek, eşik değer, chi-square tablosundaki değerlerle karşılaştırılıp baskın tekil değerler kestirilir. [1,6]'da gürültülü matrisin rankı biliniyor varsayılarak gürültülü matrislere ilişkin uzun ve kısa uzaylardan hareket edilip gürültüsüz matrisin kestirimi yapılmıştır. Bu çalışmada ise gürültülü matrisin rankının bilinmediği varsayılarak, rankın kestirimi için ardışıl tekil değerler arasındaki oranlar kestirim indisi olarak kullanılmaktadır. Bu işlem işaret-işaret oranı bulunmasına karşılık gelmektedir. Bu oranlar arasındaki en büyük değer rank kestirimi için sınır olarak alınmıştır. Bu algoritma kaotik çekicisi olan Lorenz sistemine uygulanmıştır.
İkinci bölümde, zaman serilerinde zamanda gömme yapılarak [8], gürültülü veri matrisinin oluşturulması kısaca verilmiştir. 3.bölümde ise gürültüsüz veri matrisinin rankının kestirilmesi için bir yöntem verildikten sonra, [6]'da verilen doğrusal alt uzayların kestirimi, gerçek tekil değerlerin bulunması ve gürültüsüz matrisin seçimi için yöntemlere dayanarak gürültülü veri matrisinden gürültüsüz veri matrisi elde edilmiştir.

II. Veri Matrisinin Oluşturulması

Sistem tanımlama problemlerinde ölçülen skalar büyüklükler zamanda gecikme kullanılarak zamanda gömme yöntemiyle veri matrisi elde edilir ve faz uzayı oluşturulur [7].
İlk adım olarak niceliksel veri s(m), zaman gecikmesi kullanılarak vektör biçimine sokulmalıdır. Bu işlem için öncelikle w(m) olarak ifade edilen, birbiriyle kesişmeyen pencere fonksiyonları kullanılır ve zaman eksenindeki veri [3]'de belirtildiği gibi yerel kısımlara ayrılır. Bunun sonucunda y(m)=s(m)w(m) elde edilir. w(m), birim genlikteki darbe fonksiyonudur ve süresi (1) de ifade edildiği şekildedir.

$$l_w=(k-1)+p \tag{1}$$

(1) de, p zaman eksenindeki veri için seçilmiş veri uzunluğu, k gömme boyutu, l ise zamanda gecikme miktarıdır. Veri matrisinin oluşturulması denklem (2) ile belirtilmiştir.[3]

$$M=\begin{pmatrix} y_1 & y_{1+l} & y_{1+2l} & \cdots & y_{1+(k-1)l} \\ y_2 & y_{2+l} & y_{2+2l} & \cdots & y_{2+(k-1)l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_p & y_{p+l} & y_{p+2l} & \cdots & y_{p+(k-1)l} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Veri matrisine ilişkin tanımlamadan önce aşağıdaki matematiksel kavramlar verilmiştir.

0-7803-8318-4104/$20.00©2004 IEEE

Tekil Değer Ayrıştırması [5]: Herhangibir gerçel matris **M**, $U \in R^{mxm}$, $S \in R^{mxn}$, $V \in R^{nxn}$ olmak üzere Autonne-Eckart-Young Teoremine göre aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mathbf{M}=\mathbf{U}\ \mathbf{S}\ \mathbf{V}^t \tag{3}$$

U ve **V** matrisleri gerçel ortonormal, **S** matrisi azalan sırada negatif olmayan elemanlar içeren sanki-köşegen bir matristir. **S** matrisinin köşegen elemanları σ_i, **M** matrisinin tekil değerleridir. Bu tekil değerlerin oluşturduğu grup **M** matrisinin tekil değer bandı olarak anılır. **U** ve **V** matrislerinin sütunları sırasıyla **M** matrisinin sol ve sağ tekil vektörleri olarak adlandırılır [5].
M matrisinde bulunan vektör dizisindeki toplam enerji tekil değerler bandındaki enerjiye eşittir.

SVD yönteminin başarıya ulaşması için bazı kritik noktaların dikkate alınması gerekmektedir.
i)Oluşturulan modeldeki bilgi, matrisin SVD sonucunda bulunan bir alt uzayı içinde sınırlı olmalıdır.
ii) Modelin karmaşıklığının ölçüsü, veri matrisine ilişkin rank değeridir.
iii) Bir çok uygulamada veriler, beyaz gürültü ile birleşmiştir ve SVD'nin mutlak bir gürültü filtreleme etkisi olduğu umulmaktadır [6].

III.Yöntem

A.Veri matrisinin rankının bulunması:

Bu çalışmanın ana kısmı, tahmin edilen gerçek veri matrisine ilişkin rankın kestirilmesidir. $\mathbf{M} \in R^{pxq}$, p>>q olan bir matris ve $\mu_1, \mu_2,..., \mu_r, \mu_{r+1},..., \mu_q$ bu matrisin tekil değerleri olsun. Bu tekil değerler işaretin enerji şiddetinin bir ölçüsü olduğu için, işaret-işaret oranıaşağıdaki gibi

$$\eta(i) \stackrel{\Delta}{=} \mu_i / \mu_{i+1} \tag{4}$$

$\eta(i)$ oran indisidir ve i=1...q-1. Bu yöntemin kestirilmiş rankı "r" dir ve $\eta(r)=\max_i(\eta(i))$.

B.Doğrusal Alt Uzay Kestirimi:

Tahmini veri matrisinin rankı bulunduktan sonra, veri matrisinin deterministik ve rastlantısal iki matrisin toplamı olduğu varsayımı yapılır.

$$\mathbf{M}=\mathbf{E}+\mathbf{N} \tag{5}$$

Gürültüyü **N** matrisi içerir. Tipik olarak rank(N)=q ve rank(M)=q'dur. Gürültünün bulunmadığı **E** matrisi düşük ranklıdır ve rank(E)=r<q şeklinde ifade edilir. $\mathbf{V}_e \in R^{qxq}$ dik bir matris olsun.

$$(\mathbf{V}_e^t\mathbf{V}_e=\mathbf{I}_q=\mathbf{V}_e\mathbf{V}_e^t)$$

$$\mathbf{V}_e=[\mathbf{V}_{e1}\ \mathbf{V}_{e2}]$$

$$(\mathbf{V}_{e1} \in R^{pxr}, \mathbf{V}_{e2} \in R^{px(q-r)})$$

$R(\mathbf{E}^t)=R(\mathbf{V}_{e1})$ ve $\mathbf{V}_{e2}$ nin sütun uzayı **E**'nin satır uzayı için dik baz oluşturur.

$$\mathbf{E}\mathbf{V}_{e2}=0. \tag{6}$$

$\mathbf{V}_e$, **E** matrisinin SVD'sinden doğrudan elde edilebilir.

$$E=(U_{e1}\ U_{e2})\begin{pmatrix} S_{e1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{e1}^t \\ V_{e2}^t \end{pmatrix} \tag{7}$$

$\mathbf{U}_{e1} \in R^{pxr}$, $\mathbf{S}_{e1} \in R^{rxr}$ .Buradaki kritik nokta **E** matrisinin tam değerini bulmak mümkün değildir ancak yaklaşık değeri bulunabilir.

$$M=E+N=E+NV_{e1}V_{e1}^t+NV_{e2}V_{e2}^t \tag{8}$$

Kolaylık açısından $\mathbf{E}\mathbf{V}_{e1}+\mathbf{N}\mathbf{V}_{e1}=\mathbf{P}_1\mathbf{S}_1\mathbf{Q}_1^t$ ve $\mathbf{N}\mathbf{V}_{e2}=\mathbf{P}_2\mathbf{S}_2\mathbf{Q}_2^t$ olarak alınırsa **M** matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$M=(P_1\ P_2)\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1^t V_{e1}^t \\ Q_2^t V_{e2}^t \end{pmatrix} \tag{9}$$

M'nin SVD'si ancak $\mathbf{P}_1^t\mathbf{P}_2=0$ ise vardır. Bunun için şu varsayımların sağlanması gerekmektedir:
A1) Gerçek veri gürültüye $\mathbf{E}^t\mathbf{N}=0$ anlamında dik olmalıdır.
A2) $\mathbf{V}_{e1}$ ve $\mathbf{V}_{e2}$ matrisleri $\mathbf{V}_{e1}\mathbf{N}^t\mathbf{N}\mathbf{V}_{e2}=0$ formülüne göre birbirine dik olmalıdır ve **M** matrisinden ancak $\mathbf{N}^t\mathbf{N}$ bir birim matrisi çarpanı olduğu takdirde bulunabilirler. $(\mathbf{N}^t\mathbf{N}=\sigma^2\mathbf{I}_q)$.
A3) S_1'in en küçük tekil değeri S_2'nin en büyük tekil değerinden büyük olmalıdır. σ_r/σ_{r+1} oranı işaret-işaret oranı olarak davranır.

Tahmin edilen gürültü varyansı ve gerçek tekil değerler:

E matrisinin rankı bölüm III.B'de bulunduğundan şimdi tahmin edilen gerçek tekil değerler bulunabilir. $\mu_1, \mu_2,..., \mu_r, \mu_{r+1},..., \mu_q$ **M** matrisinin tekil değerleri olsun. σ^2'nin tahmini değeri σ^2_{est}:

$$\sigma^2_{est}=\frac{\mu^2_{r+1}+...+\mu^2_q}{q-r} \tag{10}$$

şeklindedir. **E**'nin tahmin edilen gerçek tekil değerleri de (11) ile ifade edilebilir.

$$\sigma_i = \sqrt{\mu_i^2 - \sigma_{est}^2} \quad i=1,\dots,r \tag{11}$$

Bu bölümde bulunan değerlerle **E**'nin en küçük varyans tahmini ve işaret-gürültü oranı bulunabilir.

M'nin SVD'sinin **E** cinsinden ifadesi:
Bu altbölümde amaç işaret-gürültü oranının nasıl bulunduğunu ve **E** ile **M** matrisleri arasındaki ilişkiyi göstermektir. III.B de verilen A1,A2,A3 varsayımları sağlanırsa, gerçek veri matrisi **E**, **M** matrisinden ve **M**'nin SVD'si [6]'da belirtildiği gibi **E** cinsinden ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} M &= E + N \\ &= U_{e1} S_{e1} V_{e1}^t + N V_{e1} V_{e1}^t + N V_{e2} V_{e2}^t \\ &= \begin{bmatrix} U_{m1} & U_{m2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{m1} & 0 \\ 0 & S_{m2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{m1}^t \\ V_{m2}^t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

tekil değer bandında bir açıklık vardır ve işarete ilişkin olan en küçük tekil değer gürültüye ilişkin olan tekil değerden (σ) yüksektir. q-r sayıdaki tekil değer birbirine eşittir ve bu açıklık **M** matrisi için gürültü sınırı olarak gösterilir. Diklik kuralından ötürü gerçek ve gözlenmiş tekil değerler arasındaki ilişki (13) deki şekildedir:

$$S_{e1} = \sqrt{S_{m1}^2 - \sigma_{est}^2 I_r}, \quad S_{m2} = \sigma_{est} I_{q-r} \tag{13}$$

Eğer σ_r S_{e1} matrisindeki en küçük tekil değer olarak gösterilirse, işaret-gürültü oranı (14) ile tanımlanır [6].

$$SNR = \left[20\log_{10} \frac{\sigma_r}{\sigma_{est}} \right] \tag{14}$$

C. En küçük Varyans Tahmini:

En küçük varyans tahminindeki amaç gürültülü **M** matrisi içinden en iyi **E** matrisi seçimini yapabilmektir. Problem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. Bunun için aşağıdaki ifadede en küçük değeri veren **X**'in bulunması amaçlanmaktadır.
min $\|MX-E\|^2$, $X \in R^{q \times q}$.

Türevi sıfır yapan **X** bulunursa:

$\| MX-E \| = tr[X^t M^t M X + E^t E - 2X^t M^t E]$.

$X=(M^t M)^{-1} M^t E$.

$MX=(M^t M)^{-1} M^t E$.

Rank(**MX**)=rank(**E**)

Bu arada amaç **E**'nin, **M**'nin sütun uzayı üzerine dik izdüşümünü bulmaktır. En küçük varyans tahmini için en son ifade:

$MX=(M^t M)^{-1} M^t E$.

MX=

$$\begin{pmatrix} U_{m1} & U_{m2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{m1}^t \\ U_{m2}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{e1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{e1}^t \\ V_{e2}^t \end{pmatrix}$$

$$MX = \begin{bmatrix} U_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{e1}^2 (S_{e1}^2 + \sigma^2 I_r)^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m1}^t \end{bmatrix} \tag{15}$$

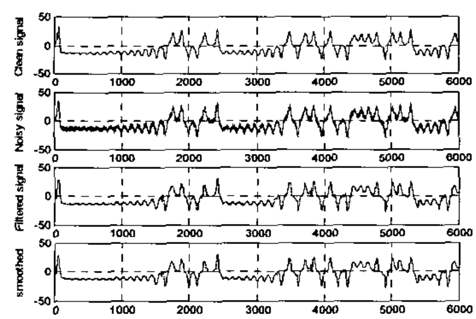
Gerçek **E** bilinmemesine rağmen, eğer varsayımlar ($N^t N = \sigma^2 I_q$ ve $N^t E = 0$) sağlanırsa, **M**'nin SVD'sinden en küçük varyans tahmini bulunabilir [6].

IV. Sonuçlar

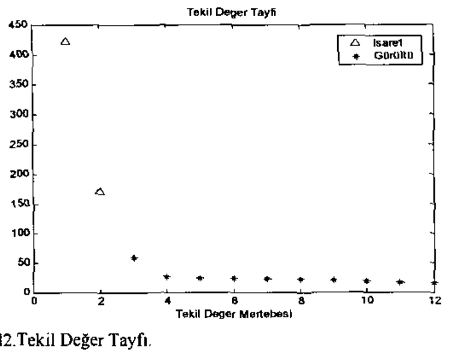
Algoritma aşağıdaki denklemlerle tanımlı Lorenz sistemi üzerinde test edilmiştir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{16}$$

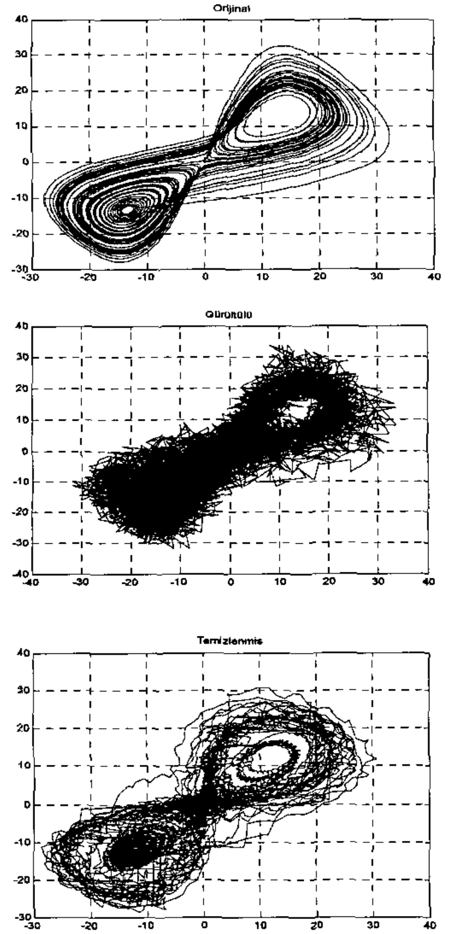
σ=16,b=4 ve r=45,92 [7]. Veriler x(t)'den 6000 örnek uzunluğunda alınmıştır. Örnekleme hızı 256Hz dir. Sıfır ortalaması olan ve varyansı dört olan beyaz Gaussian gürültüsü eklenmiştir. Gürültülü ve gürültüden arındırılmış durumların zamana göre değişimleri ve faz uzayındaki yörüngeleri elde edilmiştir. Veriler için alınan pencere fonksiyonun uzunluğu 100 örnek, gömme boyutu 12, zaman gecikmesi bir'dir.



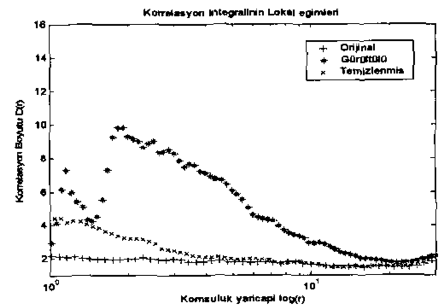
Şekil1. Zaman ekseninde sırasıyla gürültüsüz, gürültülü, gürültü azaltılmış ve düzleştirilmiş işaret.



Şekil2.Tekil Değer Tayfı.



Şekil3. Lorenz işaretinin sırasıyla gürültüsüz, gürültülü ve filtrelenmiş faz uzayı gösterimi.



Şekil4. Lokal eğimlerin komşuluk yarıçapına göre değişimi. Eğrilerdeki düzlük tahmini ilinti boyutunu veriyor.

Şekil4'de gösterilen ilinti boyutu-komşuluk menzili grafiğinde oluşan düzlük boyut tahmini yapmamızı sağlıyor. Buradan da görüleceği üzere, ilk durumdaki işarete gürültü eklendiğinde hemen hemen hiç bir komşuluk aralığında düzlük oluşmazken filtreleme sonucunda belli bir komşuluk menzili için yeniden düzlük yakalandığını ve boyut tahmini yapılabildiğini görüyoruz. Şekil 2 deki tekil değer tayfında ise üçgenle gösterilen ilk iki tekil değer işarete ilişkin iken diğer tekil değerler filtrelemeye maruz kalmaktadır. İşaret-gürültü oranının düşmesiyle kullanılan yöntemin de performansının düştüğünü unutmamak gerekir.

Kaynakça:

[1] Eric.J. Kostelich, T. Schreiber. "Noise Reduction in Chaotic Time Series Data, A Survey of Common Methods", Physical Review E,vol.48 No.3,1993

[2] H.Kantz,T.Schereiber,"Nonlinear Time Series Analysis",1997, Cambridge University Press.

[3] B.Pilgram, W.Scfappacher, "Estimation of The Dominant Singular Values for SVD Based Noise Reduction Methods", International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.8,No.3 (1998) pp:571-580.

[4] J.J. Fuchs, "Estimating The Number of Sinusoids in Additive White Noise" IEEE Transactions on Signal Processing vol:36,No:12, December 1988

[5] B. De Moor, "Mathematical Concepts and Techniques for Modelling of Static and Dynamical Systems",Katholieke Universiteit,June 1988

[6] B.De Moor, "The Singular Value Decomposition and Long and Short Spaces of Noisy Matrices", IEEE Transactions on Signal Processing. Vol.41. No.9, September 1993

[7] H.I. Abarbanel,"Analysis of Observed Chaotic Data" Springer-Verlag, 1996.

[8] F.Takens,"Dynamical Systems and Turbulance" Lecture notes in Mathematics vol:898, Springer-Verlag,1981