

## İki Serbestlik Dereceli Mekanizmalarla İşlev Sentezinde Tasarım Noktalarının Eşit ve Çebişev Aralıklandırması ile Seçiminin Karşılaştırılması

T. Bilginca\*  
İzmir Institute of Technology  
İzmir

G. Kiper†  
İzmir Institute of Technology  
İzmir

**Özet** Bu çalışmada iki serbestlik dereceli düzlemsel beş-kol mekanizması için işlev sentez problemi en küçük kareler yöntemi ile ele alınmıştır. Çok  $s^{\circ}$  mekanizmanın sentez problemi, analitik olarak ifade edilmiş ve mekanizmanın görev fonksiyonu belirlenmiştir. Tek serbestlik dereceli mekanizmaların işlev sentezi probleminde yaklaşım işlevi polinom şeklinde olmadığı halde Çebişev aralıklandırmasının diğer aralıklandırma seçeneklerine nispeten daha iyi sonuç verdiği bilinmekte ve işlev sentezinde tasarım noktalarının seçimi bir girdi değişkenli problemler için Çebişev aralıklandırması kullanılmaktadır. Bu sebeple bu çalışmada çok serbestlik dereceli mekanizmaların işlev sentezinde de Çebişev aralıklandırmasının etkisi araştırılmıştır. İki serbestlik dereceli düzlemsel beş-kol mekanizması ile iki girdili bir fonksiyonun aynı tanım kümesi için eşit aralıklandırma ve Çebişev aralıklandırması ile seçilen aynı sayıdaki tasarım noktaları ile iki ayrı çözüm yapılmış ve hata değerleri üzerine etkileri araştırılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** işlev sentezi, en küçük kareler yöntemi, Çebişev aralıklandırması, düzlemsel beş-kol mekanizması

**Abstract** In this study, function synthesis problem with a two degrees-of-freedom planar five-bar mechanism is investigated with least squares approximation method. The synthesis problem is formulated analytically and objective function is presented. In function generation synthesis with single degree-of-freedom mechanisms, even if the approximation function is not in the form of a polynomial, it is known that the Chebyshev spacing provides better results compared to other spacing alternatives. In this study the effect of Chebyshev spacing in function generation synthesis of multi degrees-of-freedom mechanisms. The planar five-bar mechanism is used to simulate a two-input function with use of equal and Chebyshev spacing and then the effect of different spacings on the errors is investigated.

**Keywords:** function generation, least squares approximation, Chebyshev spacing, planar five-bar mechanism

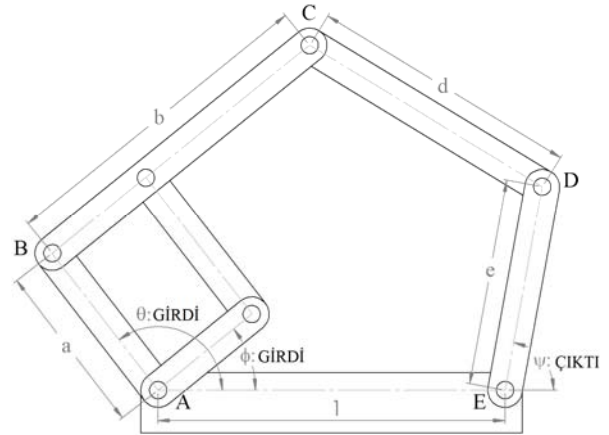
\* tbilginca@gmail.com

† gokhankiper@iyte.edu.tr

### I Giriş

Düzlemsel dört-kol ve krank-biyel mekanizması gibi çok bilinen tek serbestlik ( $s^{\circ}$ ) mekanizmalar kinematik sentez uygulamalarında çokça kullanılmaktadır. Kinematik sentez uygulamalarında kullanılan iki  $s^{\circ}$  mekanizmalar için ise basit bir örnek olarak düzlemsel beş-kol mekanizması gösterilebilir.

Kinematik sentez problemleri, istenilen bir hareketi gerçekleştirecek mekanizmanın uzuv boylarının kabul edilebilir bir hata ile belirlenmesi olarak ifade edilebilir. Mekanizmalarda kinematik sentez, konum, yörünge ve işlev sentezi olarak sınıflandırılmaktadır. Mekanizmanın matematiksel modeli ile arzu edilen konum/yörünge/işlev arasında yaklaşık bir bağ kurmak üzere geliştirilen sentez yöntemlerine yaklaşım yöntemleri (İng. approximation methods) denmektedir. Yaklaşım yöntemlerinden en çok bilinenler polinom yaklaşımı, en küçük kareler yöntemi ve Çebişev yaklaşımıdır [1]. Bu çalışmada 2- $s^{\circ}$  düzlemsel beş-kol mekanizmasının (Şekil 1) en küçük kareler yöntemi ile işlev sentez problemi ele alınmıştır.



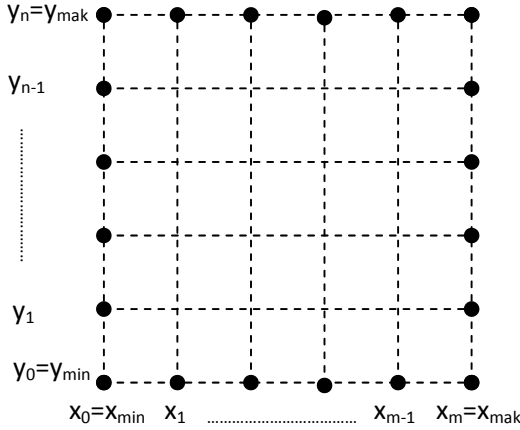
Şekil 1. Düzlemsel Beş-Kol Mekanizması [2]

En küçük kareler yönteminde amaç seçilen tasarım noktalarında gerçekleştirilmek istenen işlev değeri ile yaklaşım işlevinin değeri arasındaki hataların karelerinin toplamını en aza indirmeye çalışmak olarak ifade edilebilir. En küçük kareler yöntemi çok  $s^{\circ}$  mekanizmalarda çok girdili işlevleri elde etmek için kullanılabilmektedir [3, 4]. En küçük kareler yöntemi kullanıldığında tasarım noktalarının seçimi, hatanın

mertebesini etkilemektedir. Genellikle çok s° mekanizmalarda tasarım noktaları eşit aralıklarda alınmaktadır [2, 3]. Tasarım noktalarının belirlenmesinde kullanılabilecek diğer bir yöntem de Çebişev aralıklandırmasıdır [4, 5]. Freudenstein [6] m·n dereceli polinomlar ile iki girdili bir işlevin yaklaşımının yapılabilmesi için m·n tasarım noktasının optimum seçimi için genel bir yöntem önermiştir. Bu çalışmaya göre optimum seçim her bir girdi değişkeni için Çebişev aralıklandırmasının uygulanması ile olmaktadır. Tek s° mekanizmalar ile işlev sentezinde yaklaşım işlevi polinom şeklinde olmadığı halde Çebişev aralıklandırmasının diğer aralıklandırma seçeneklerine nispeten daha iyi sonuç verdiği bilinmektedir [4, 5]. Bu bilgiden yola çıkarak bu çalışmada çok s° mekanizmaların işlev sentezinde de Çebişev aralıklandırmasının etkisi araştırılmıştır. 2-s° düzlemsel beş-kol mekanizması ile iki girdili bir fonksiyonun aynı tanım kümesi için eşit aralıklandırma ve Çebişev aralıklandırması ile seçilen aynı sayıdaki tasarım noktası ile iki ayrı çözüm yapılmış ve hata değerleri üzerine etkileri araştırılmıştır. Üzerinde çalışılan örneklerde Çebişev aralıklandırması kullanıldığında en büyük hata değerinin eşit aralıklandırma ile bulunan hata değerine göre daha küçük olduğu görülmüştür.

## II İki Girdili İşlev Sentez Problemi

Tek s° li mekanizmanın tanım kümesi genellikle x eksenini boyunca tanımlanır ve Çebişev aralıklandırması bu eksen boyunca yapılarak mekanizmanın sentezi gerçekleştirilir ve % hata değerleri aynı grafiğin y eksenini boyunca ifade edilir. İki s° li mekanizmalarda ise x ve y eksenini tanımlama kümesini oluşturmakta ve % hata değerleri z eksenini boyunca ifade edilmektedir. Dikdörtgen biçimindeki tanım kümesinde belirlenecek tasarım noktaları seçimi sentez sonucunda elde edilecek mekanizmanın hassasiyeti üzerinde önem arz etmektedir.



Şekil 2. Dikdörtgen Tanım Kümesi [2]

Çebişev aralıklandırması uygulanırken x ve y aralıklandırması aşağıdaki eşitlikler kullanılarak yapılır [6]:

$$\begin{aligned} x_u &= \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} - \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} \cos \frac{(2u+1)\pi}{2m+2}; \\ y_v &= \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2} - \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \cos \frac{(2v+1)\pi}{2n+2} \quad (1) \\ u &= 0, 1, \dots, m \text{ ve } v = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Burada  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$ ,  $y_{\min}$  ve  $y_{\max}$  x ve y değişkenlerinin minimum ve maksimum değerlerini, u ve v sırasıyla x, y eksenlerinde nokta numarasını, m + 1 ve n + 1 de sırasıyla x, y eksenlerindeki nokta sayılarını ifade etmektedir.

## III 5R Mekanizması Sentezi

Bu kısımda konu bütünlüğü açısından [2] çalışmasındaki formülasyon burada tekrar verilmektedir. Şekil 1'deki düzlemsel beş-kol mekanizmasının girdi değişkenleri  $\theta$ ,  $\phi$  ve çıktı değişkeni  $\psi$  dir. Sisteme eklenen paralelkenar devresi ile mekanizmanın her iki girdisinin sabit eklemeden verilebilmesi sağlanmıştır. Mekanizmanın ölçeklendirilmesi girdi-çıktı (G/Ç) ilişkisini etkilemediği için sabit uzuv uzunluğunu 1 olarak, mekanizmanın hareketli uzuvlarının uzunluklarını da a, b, c, d olarak seçilmiştir.

Mekanizmanın G/Ç ilişkisi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} |\overline{CD}| &= |\overline{AE} + \overline{ED} - \overline{AB} - \overline{BC}| \\ \Rightarrow \left( \begin{array}{c} a \cos \theta + b \cos \phi \\ -1 - e \cos \psi \end{array} \right)^2 + \left( \begin{array}{c} a \sin \theta + b \sin \phi \\ -e \sin \psi \end{array} \right)^2 &= d^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Eşitlik (2) polinom şeklinde ifade edilebilir:

$$\sum_{j=1}^6 P_j f_j(x) - F(x) = 0 \quad (3)$$

Burada x girdi-çıktı değerlerini ( $\theta$ ,  $\phi$  ve  $\psi$ ) ifade etmektedir.  $\{P_j\}_1^6$ ,  $\{f_j(x)\}_1^6$  ve  $F(x)$  aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$P_1 = \frac{-1 - a^2 - b^2 + d^2 - e^2}{2e}, P_2 = a, P_3 = b, P_4 = \frac{a}{e},$$

$$P_5 = P_3 P_4 = \lambda_1 = \frac{ab}{e}, P_6 = \frac{P_5}{P_2} = \lambda_2 = \frac{b}{e},$$

$$f_1(x) = 1, f_2(x) = \cos(\theta - \psi), f_3(x) = \cos(\phi - \psi), \quad (4)$$

$$f_4(x) = \cos \theta, f_5(x) = -\cos(\theta - \phi),$$

$$f_6(x) = \cos \phi \text{ ve } F(x) = \cos \psi$$

Eşitlikte, dört tasarım parametresi (a, b, c, d) yer almakta ancak altı  $P_j$  ifadesi bulunmaktadır. Bu nedenle  $P_5$  ve  $P_6$  diğer  $P_j$  ler tarafından ifade edilebilir. Bunun için iki Lagrange parametresi tanımlanacaktır:  $\lambda_1 = P_5$  ve  $\lambda_2 = P_6$ . Sistemin doğrusallaştırılabilmesi için  $j = 1, 2, 3, 4$  için  $P_j = \ell_j + m_j\lambda_1 + n_j\lambda_2$  tanımlanarak Eşitlik (3) şu şekilde güncellenir:

$$\sum_{j=1}^4 (\ell_j + m_j\lambda_1 + n_j\lambda_2) f_j(\mathbf{x}) + \lambda_1 f_5(\mathbf{x}) + \lambda_2 f_6(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) = 0 \quad (5)$$

Eşitlik (5) tüm tasarım noktalarında sağlanmalı, bu yüzden  $\lambda_1, \lambda_2$  nin katsayıları için

$$\sum_{j=1}^4 \ell_j f_j(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^4 m_j f_j(\mathbf{x}) + f_5(\mathbf{x}) = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^4 n_j f_j(\mathbf{x}) + f_6(\mathbf{x}) = 0 \quad (8)$$

En küçük kareler yönteminde tasarım noktalarının sayısı  $N$ , tasarım parametresi sayısından fazladır ve hataların karelerinin toplamı minimize edilmeye çalışılır. Her bir  $x_i$  tasarım noktasında, Eşitlik (6)-(8) deki hataların karelerinin toplamı

$$S_\ell = \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{j=1}^4 \ell_j f_{ji} - F(\mathbf{x}_i) \right]^2 \quad (9)$$

$$S_m = \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{j=1}^4 m_j f_{ji} + f_{5i} \right]^2 \quad (10)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{j=1}^4 n_j f_{ji} + f_{6i} \right]^2 \quad (11)$$

şeklinde tanımlanır. Hataların karelerinin bulunabilmesi için Eşitlik (9)-(11)in sırasıyla  $\ell_j, m_j, n_j$  ye göre  $j = 1, 2, 3, 4$  için türevleri alınır:

$$\frac{1}{2} \frac{dS_\ell}{d\ell_j} = \sum_{i=1}^N [f_{1i}\ell_1 + f_{2i}\ell_2 + f_{3i}\ell_3 + f_{4i}\ell_4 - F_i] f_{ji} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dS_m}{dm_j} = \sum_{i=1}^N [f_{1i}m_1 + f_{2i}m_2 + f_{3i}m_3 + f_{4i}m_4 + f_{5i}] f_{ji} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \frac{dS_n}{dn_j} = \sum_{i=1}^N [f_{1i}n_1 + f_{2i}n_2 + f_{3i}n_3 + f_{4i}n_4 + f_{6i}] f_{ji} = 0 \quad (14)$$

Eşitlik (12)  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$  e göre doğrusaldır. Benzer şekilde Eşitlik (13) and (14) sırasıyla  $m_1, m_2, m_3, m_4$  ve  $n_1, n_2, n_3, n_4$  için doğrusaldır. Eşitlik (12)-(14) matris formunda yazılırsa:

$$\left( \sum_{i=1}^N f_{1i} f_{ji} \right) \ell_1 + \left( \sum_{i=1}^N f_{2i} f_{ji} \right) \ell_2 + \left( \sum_{i=1}^N f_{3i} f_{ji} \right) \ell_3 + \left( \sum_{i=1}^N f_{4i} f_{ji} \right) \ell_4 = \sum_{i=1}^N F_i f_{ji} \Rightarrow [A_{jk}] [\ell_j] = [b_j] \quad (15)$$

$$\left( \sum_{i=1}^N f_{1i} f_{ji} \right) m_1 + \left( \sum_{i=1}^N f_{2i} f_{ji} \right) m_2 + \left( \sum_{i=1}^N f_{3i} f_{ji} \right) m_3 + \left( \sum_{i=1}^N f_{4i} f_{ji} \right) m_4 = - \sum_{i=1}^N f_{5i} f_{ji} \Rightarrow [A_{jk}] [m_j] = [c_j] \quad (16)$$

$$\left( \sum_{i=1}^N f_{1i} f_{ji} \right) n_1 + \left( \sum_{i=1}^N f_{2i} f_{ji} \right) n_2 + \left( \sum_{i=1}^N f_{3i} f_{ji} \right) n_3 + \left( \sum_{i=1}^N f_{4i} f_{ji} \right) n_4 = - \sum_{i=1}^N f_{6i} f_{ji} \Rightarrow [A_{jk}] [n_j] = [d_j] \quad (17)$$

elde edilir. Burada  $A_{jk} = \sum_{i=1}^N f_{ki} f_{ji}$  ( $j, k = 1, 2, 3, 4$ ) olmak üzere  $[A_{jk}]$   $4 \times 4$  katsayı matrisidir.  $j = 1, 2, 3, 4$  için  $[\ell_j] = [\ell_1 \ \ell_2 \ \ell_3 \ \ell_4]^T$ ,  $[m_j] = [m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_4]^T$ ,

$[n_j] = [n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4]^T$  ve  $b_j = \sum_{i=1}^N F_i f_{ji}$ ,  $c_j = - \sum_{i=1}^N f_{5i} f_{ji}$ ,

$d_j = - \sum_{i=1}^N f_{6i} f_{ji}$  olmak üzere  $[b_j], [c_j]$  ve  $[d_j]$   $4 \times 1$  matrislerdir. Eşitlik (15)-(17) kullanılarak  $[A_{jk}]$  matrisinin tersi alınarak çözümlerse  $\ell_j, m_j, n_j$  bulunur,  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  aşağıdaki gibi çözülür:

$\lambda_1 = P_3 P_4 = (1_3 + m_3 \lambda_1 + n_3 \lambda_2)(1_4 + m_4 \lambda_1 + n_4 \lambda_2)$

$$\Rightarrow m_3 m_4 \lambda_1^2 + n_3 n_4 \lambda_2^2 + (m_3 n_4 + n_3 m_4) \lambda_1 \lambda_2 + (1_3 m_4 + m_3 1_4 - 1) \lambda_1 + (1_3 n_4 + n_3 1_4) \lambda_2 + 1_3 1_4 = 0 \quad (18)$$

$$\lambda_2 = \frac{P_5}{P_2} = \frac{\lambda_1}{1_2 + m_2 \lambda_1 + n_2 \lambda_2} \quad (19)$$

$$\Rightarrow n_2 \lambda_2^2 + m_2 \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 + 1_2 \lambda_2 = 0$$

$\lambda_1$  Eşitlik (19) dan çözülebilir:

$$\lambda_1 = \frac{n_2 \lambda_2^2 + 1_2 \lambda_2}{1 - m_2 \lambda_2} \quad (20)$$

Eşitlik (20), Eşitlik (18) de yerine konduğunda

$$\begin{aligned}
 & m_3 m_4 (n_2 \lambda_2^2 + l_2 \lambda_2)^2 + n_3 n_4 \lambda_2^2 (1 - m_2 \lambda_2)^2 + \\
 & (m_3 n_4 + n_3 m_4) (n_2 \lambda_2^2 + l_2 \lambda_2) (1 - m_2 \lambda_2) \lambda_2 + \\
 & (l_3 m_4 + m_3 l_4 - 1) (n_2 \lambda_2^2 + l_2 \lambda_2) (1 - m_2 \lambda_2) + \\
 & (l_3 n_4 + n_3 l_4) \lambda_2 (1 - m_2 \lambda_2)^2 + l_3 l_4 (1 - m_2 \lambda_2)^2 = 0
 \end{aligned} \quad (21)$$

Eşitlik (21)  $\lambda_2$  cinsinden dördüncü derece polinom denklemdir. Burada  $\lambda_2$  için 4, 2 veya 0 gerçel çözüm olabilir. Çözüm var ise içlerinden biri seçilir ve Eşitlik (20) kullanılarak  $\lambda_1$  belirlenir. Son olarak  $j = 1, 2, 3, 4$  için  $P_j = \ell_j + m_j \lambda_1 + n_j \lambda_2$  değerleri bulunur ve tasarım parametreleri Eşitlik (3) kullanılarak bulunur:

$$a = P_2, b = P_3, e = \frac{a}{P_4}, d = \sqrt{1 + a^2 + b^2 + e^2 + 2eP_1}$$

#### IV Sayısal Örnek

$5 \leq x \leq 9$  ve  $1 \leq y \leq 4$  aralıkları için  $z = f(x, y) = x^{1.1} y^{1.4}$  işlevi için sentez problemi MS Excel kullanılarak çözdürülmüş ve  $75^\circ \geq \theta \geq 30^\circ$ ,  $80^\circ \leq \phi \leq 130^\circ$ ,  $120^\circ \leq \psi \leq 170^\circ$  olacak şekilde doğru orantı ile ölçeklendirme yapılmıştır. Tasarım noktaları x ve y eksenleri için 30 aralıklandırma yapılarak toplam 900 nokta için hesaplanmış ve mekanizmanın hata oranları incelenmiştir. Mekanizmanın yüzde mutlak hata oranları

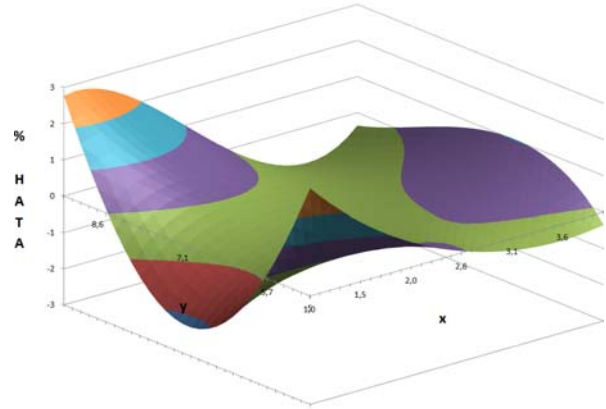
$$\% \text{ Mutlak Hata} = 100 \left| \frac{Z_{\text{istenen}} - Z_{\text{hesaplanan}}}{Z_{\text{mak}}} \right|$$

kullanılarak hesaplanmıştır. Eşit ve Çebişev aralıklandırmalarının mekanizmanın hassasiyeti üzerine etkileri incelenmiş ve mekanizmanın mutlak hata değerleri ile hesaplanan uzuv boyut oranları Tablo 1’de verilmiştir.

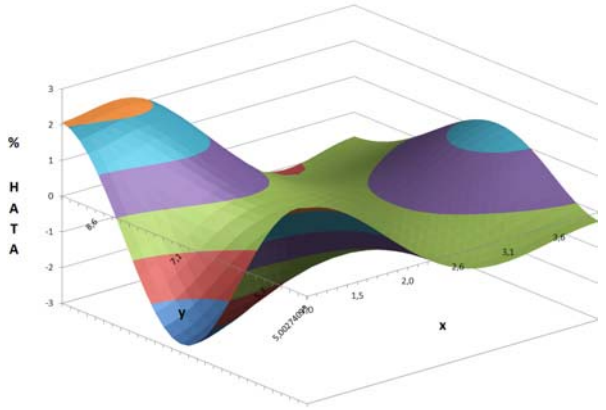
	Eşit Aralıklandırma	Çebişev Aralıklandırması
En Büyük % Mutlak Hata	% 2.96	% 2.78
Uzuv Boyutları	a = 2.382, b = 1.636, c = 2.671, d = 1.577	a = 2.010, b = 1.754, c = 2.383, d = 1.616

TABLO 1. 900 Nokta İçin En Küçük Mutlak Hata ve Uzuv Uzunlukları

Tanım kümesi üzerinde % mutlak hata değişimi de eşit aralıklandırma için Şekil 3’te, Çebişev aralıklandırması için ise Şekil 4’te verilmiştir.



Şekil 3. Eşit Aralıklandırmada Yüzde Hata Değişimi



Şekil 4. Çebişev Aralıklandırmasında Yüzde Hata Değişimi

Aynı mekanizma için benzeri bir hesaplama 100 nokta için (x ve y için 10ar nokta) yapılmış ve en büyük mutlak hata değerleri ve hesaplanan uzuv boyut oranları için Tablo 2’de verilmiştir. Benzer şekilde Çebişev aralıklandırması, nispeten daha iyi sonuç vermiştir. Bir diğer ilginç sonuç da 900 yerine 100 nokta seçildiğinde daha küçük hata değerlerinin elde ediliyor olmasıdır.

	Eşit Aralıklandırma	Çebişev Aralıklandırması
En Büyük % Mutlak Hata	% 2.85	% 2.65
Uzuv Boyutları	a = 1.991, b = 1.764, c = 2.370, d = 1.628	a = 2.005, b = 1.780, c = 2.384, d = 1.613

TABLO 2. 100 Nokta İçin En Küçük Mutlak Hata ve Uzuv Uzunlukları

## V Sonuçlar

Bu çalışmada düzlemsel beş kol mekanizması için işlev sentez problemi en küçük kareler yöntemi ile incelenmiştir. Mekanizmanın görev fonksiyonunun analitik olarak hesap detayları verilmiş ve de eşit ve Çebişev aralıklandırması ile işlev sentezi problemi incelenmiştir. Üzerinde çalışılan örneklere göre tek  $s^\circ$  mekanizmalarda olduğu gibi iki  $s^\circ$  beş kol mekanizmasında da Çebişev aralıklandırmasının nispeten az hata ile sonuç verdiği görülmüştür. Ayrıca tasarım için seçilen nokta sayısının azaltılması ile hatanın beklenilen aksine yükselmediği gözlemlenmiştir. Bunun nedeni hesaplama hataları ya da seçilen noktaların yeri olabilir.

## Kaynakça

- [1] Levitskii, N. I. Synthesis of Mechanisms by Chebyshev, SSCB Bilim Akademisi, 1946.
- [2] Kiper G., Bağdadioglu B. ve Bilginan T. Function synthesis of the planar 5R mechanism using least squares approximation, J. Lenarcic, O. Khatib (Ed.), Advances in Robot Kinematics, 69-76, 2014.
- [3] Kiper G. ve Bağdadioglu B. Function generation synthesis with a 2-dof overconstrained double-spherical 7R mechanism using the method of decomposition and least squares approximation, P. Flores, F. Viadero (Ed.), New Trends in Mechanism and Machine Science: From Fundamentals to Industrial Applications, Springer, 167-174, 2015.
- [4] Alizade R., Can F. C. ve Kilit Ö. Least square approximate motion generation synthesis of spherical linkages by using Chebyshev and equal spacing. Mechanism and Machine Theory, 61: 123–135, Mart 2014
- [5] Alizade R. ve Gezin E. Synthesis of function generating spherical four bar mechanism for the six independent parameter, Mechanism and Machine Theory, 46(9):1316-1326, Kasım 2011.
- [6] Freudenstein F. Bi-variate, rectangular, optimum-interval interpolation. Math. Comp., 15: 288-291, 1961.