# Oryantasyon Değiştiren Ek-Boyutlu Uzayların Boşluk Enerji Yoğunluğu ve Kaluza-Klein Modları Üzerindeki Etkileri

**Proje No:** 107T235

RECAİ ERDEM

4 Temmuz 2010

İzmir

# İçindekiler

# Önsöz

Bu doküman 01.11.2007 - 30.04.2010 tarihleri arasında yürütülen 107T235 numaralı, *Oryantasyon Değiştiren Ek-Boyutlu Uzayların Boşluk Enerji Yoğunluğu ve Kaluza-Klein Modları Üzerindeki Etkileri* başlıklı TÜBİTAK Bilimsel Araştırma Projesi sonuç raporu olarak hazırlanmıştır.

# Özet

Daha önce benim ve başka araştırmalacıların yaptığı çalışmalarda, bazı örnekler yoluyla, oryantasyon değiştiren ek boyutlu uzayların bir simetrisi kullanılarak kozmolojik sabit probleminin klasik düzeyde çözümü yönünde önemli bir ilerleme sağlanabileceği gösterilmişti. Bu çalışmada ek boyutlu oryantasyon terslemesi ile ilgili simetrinin kuantum düzeyinde de geçerli olmasının fiziksel koşulları ve sonuçları irdelendi. Bu yaklaşımın ek boyutlu uzaylardaki doğal bir sonucu olarak Kaluza-Klein modlarının bu çeşit uzaylardaki durumu incelendi. İlk aşamada (R. Erdem, J. Phys. A 41 (2008) 235401), bu teorik çerçevenin kozmolojik düzeydeki sıfır-nokta enerjileri problemine de çözüm getirdiği gösterildi. İkinci olarak (R. Erdem, Mod. Phys. Lett. A 25 (2010) 825) bu çeşit uzayların düşük enerjilerde sadece sonlu sayıda Kaluza-Klein modu gözlenebilmesi ve bunların hepsinin kütlesiz olabilmesi gibi Kaluza-Klein modlarına ilişkin ilginç sonuçlar doğurabileceği gösterildi. Son olarak (R. Erdem, arXiv:0902.4819), bir önceki çalışmanın doğal bir sonucu olarak bu tip uzaylarda Kaluza-Klein modlarının, standart ek boyutlu uzaylardakinin tersine, quantum alan teorilerindeki sonsuzlukları daha da kötüleştirmek yerine otomatik Pauli-Villars benzeri bir regülürizasyona denk gelir şekilde, bu problemi hafiflettiği gösterildi.

**Anahtar Kelimeler**:Ek boyutlar, Kaluza-Klein, sıfır-nokta enerjisi, metrik tersleme simetrisi, oryantasyon değiştiren uzaylar, kozmolojik sabit.

# Abstract

In the previous studies of mine and other authors it was shown, through some examples, that some considerable progress can be achieved in the solution of the cosmological constant problem at classical level by using a symmetry of orientation changing extra dimensional spaces. In this study the physical conditions and the results of imposing the extra dimensional symmetry that is related to the orientation reversal of the space are considered at quantum level. As a natural consequence of this approach the status of the Kaluza-Klein modes in this type of spaces are examined. First (R. Erdem, J.Phys. A 41 (2008) 235401) it has been shown that this theoretical framework provides a solution to the zero-point energy problem of quantum field theories at the cosmological level. Second (R. Erdem, Mod.Phys.Lett. A 25 (2010) 825) it has been shown that this type of spaces may give interesting results regarding the Kaluza-Klein modes such as the possibility of finite number of Kaluza-Klein modes appearing at low energies and all being massless. Finally (R. Erdem, arXiv:0902.4819) it has been shown that, as a natural consequence of the previous work, the Kaluza-Klein modes in this type of spaces, on contrary to the standard case, may alleviate the infinities in quantum field theories in such a way that amounts to an automatic Pauli-Villars-like regularization.

**Keywords**:Extra dimensions, Kaluza-Klein, zero-point energy, metric reversal symmetry, Orientation changing spaces, cosmological constant.

# 1. Giriş

Standart (relativistic) fizik dört uzay ve bir zaman boyutunda ifade edilir. Bununla birlikte bu standart dört boyutlu uzayda anlaşılamayan ya da yeterince anlaşılamayan, fermiyon kütleleri ve nesilleri, tüm temel kuvvetlerin birleştirilmesi, hiyerarşi problemi gibi bir çok fiziksel nicelik daha yüksek boyutlu uzaylarda [1, 2] (diğer bir deyişle ek boyutlu uzaylarda) çok daha anlaşılır hale gelmektedir [3-9]. Çözülmesi yönündeki çabalarda ek boyutlu uzaylardan yararlanılan önemli bir problem de kozmolojik sabit problemidir [10, 11]. Kozmoljik sabit, evrenin ivmelenerek genişlediğini gösteren gözlemleri açıklamanın en basit yoludur [12]. Ancak Higgs alanı boşluk beklenen değeri gibi kozmolojik sabite teorik katkılar, gözlenen kozmolojik ivmelenmenin gerektirdiğinin çok ötesindedir. Örneğin Higgs alanı boşluk beklenen değerinin verdiği katkı, gözlenenin $10^{55}$, kuantum renk dinamiği condensate'inin katkısı gözlenenin $10^{44}$ katıdır [13, 14]. Bu problemi çözmenin en kolay yolu, bu katkıların birbirini götürmesi gibi görünmekle birlikte bunu sağlayan bir simetrinin yokluğu durumunda bu gerçek bir çözüm olamaz. Çünkü bu götürmelerin gözlenen değeri verecek şekilde son derece hassas olması gerekir. Bu kadar hassas bir götürmeyi açıklayabilmek için bunun dinamiğini açık bir şekilde açıklayabilmek ve/veya bunu sağlayan bir simetri bulmak gerekir. Diğer bir deyişle, bu katkıların, keyfi şekilde, birbirlerini bu derece hassas şekilde nötürleştirdiğini varsaymak mümkün değildir. Bu sorun (eski) kozmolojik sabit problemi olarak bilinir. Öte yandan evrenin genişlemesinin başka bir yolla (örneğin skaler alanlarla veya değiştirilmiş yerçekimi modelleriyle) açıklamak da kozmolojik sabit problemini ortadan kaldırmaz. Öyle bir durumda ise problem şekil değiştirerek bu teorik katkıların neden gözlemsel bir etkiye neden olmadıkları şekline bürünmektedir. Kısaca özetlemek gerekirse, kozmolojik sabit problemi fizikteki en önemli problemlerden biridir. Bu sorunun standart dört boyutlu çerçevede çözümü için literatürde, ölçeklendirme (scaling) simetrisi, süpersimetri, süpergravite, kendi kendini ayarlama modelleri (self-tuning) gibi bir çok model yöntem araştırılmıştır. Fakat ne yazık ki tüm bu yöntemlerin ciddi problemleri bulunmaktadır [13, 15]. Daha önce de değindiğimiz gibi kozmolojik sabit problemini çözmek için başvurulan (nispeten daha yeni) diğer bir yöntem, ek boyutlu uzaylar kullanmaktır. Bu çerçevedeki standart çalışmalar, temelde, (süpersimetrik büyük ek boyut modelleri çerçevesinde) madde bir brane'de lokalize iken yerçekiminin tüm uzayda yayılması yoluyla ek boyutların yerçekimini seyreltmesi sonucu efektif boşluk enerjisinin azaltılmasına dayanmaktadır. Bu senaryonun temel fikri ilginç olmakla birlikte başlangıç koşullarına çok duyarlı olması ve benzeri ciddi teknik sorunlara sahiptir [16].

Kozmolojik sabit probleminde ilerleme sağlamak amacıyla çalışılmış bir diğer yaklaşım da, doğanın (ilk olarak bu proje yürütücüsü tarafından öne sürülen) metrik tersleme simetrisi olarak adlandırılabilecek bir simetriye uyduğunu varsaymaktır [11, 17, 18]. Bu simetrinin ölçeklendirme simetrisi ve süpersimetriye göre en büyük avantajı; ölçeklendirme simetrisi ve süpersimetrinin kırılma miktarlarının ve dolayısıyla izin verdikleri boşluk enerji yoğuklarının doğrudan parçacık kütleleriyle veya farklarıyla doğru orantılı olmalarıdır. Bu nedenle bu simetrilerin öngördüğü boşluk enerji yoğunlukları gözlenenin çok üzerindedir. Halbuki metrik tersleme simetrisinin böyle bir sorunu bulunmamaktadır. Bu simetrinin dört boyutlu versiyonu [15, 17] Einstein denklemleri düzeyinde varsayılır ve bu nedenle de ancak klasik düzeyde geçerli olabilir. Yapılan çalışmalar simetrinin bu versiyonunun klasik düzeyde bile sadece yerçekimi sektörü ve vakum düzeyinde geçerli olabileceğini göstermiştir [17]. Bu simetrinin ek boyutlu formülasyonu, ek boyutlu eylemin (action) simetri dönüşümü altında değişmezliği ilkesini kullanır. Bu nedenle kuantum düzeyinde çalışmaya daha uygundur. Bu simetri ilk aşamada klasik düzeyde çalışılmış ve başarılı olduğu gösterilmişti [11].

Yukarıda sözü edilen metrik tersleme simetrisinin kuantum düzeyinde (özellikle Kaluza-Klein modları bağlamında) çalışılması bu projenin araştırma konusunu oluşturmaktadır. İlk olarak simetrinin hem yerçekimi ve boşluk enerjisi hem de madde için geçerli olması için gereken koşullar araştırıldı. Bu durumun Kaluza-Klein modlarının karışmasına izin vererek sağlanabileceği gösterildi.Bunun doğal bir sonucunun kozmolojik kuantum sıfır-nokta enerjileri probleminin ortadan kalkması olduğu görüldü [19]. (Bu noktada temelde sıfır-nokta enerjisi probleminin kozmolojik sabit probleminden bağımsız bir problem olarak ele alınabileceğini belirtmek yararlı olur. Eğer kuantum alan teorisi efektif bir teori olarak değerlendirilirse bu durumda, sıfır-nokta enerji yoğunluğunun durum denklemi kozmolojik sabitten farklı olur. Ancak renormalizasyon ölçeğine bağlı terimlerin çıkarılması durumunda durum denklemi kozmolojik sabit durum denklemi olur [20-22]. ) İkinci olarak, bu tür uzaylarda metrikteki konformal faktörün perdeleme etkisi nedeniyle sadece sonlu sayıda Kaluza-Klein modunun düşük enerji transferli etkileşmelere girebileceği, diğerlerin bu enerji skalasının altındaki etkileşmelere duyarsız olacağı ve birden fazla sayıda modun sıfır kütleli alınabileceği modeller kurulabileceği (fermiyon alanları özelinde) gösterildi [23]. Son olarak bu tür modellerde konformal faktörün perdeleme etkisi ve Kaluza-Klein modlarının karışma özelliği kullanılarak fermiyonlar için Pauli-Villars benzeri otomatik bir regülazasyon elde edilebileceği gösterildi [24].

# 2. Metrik Tersleme Simetrisine İlişkin Genel Bilgiler

Metrik tersleme dönüşümü metriğin eksi ile çarpılmasından oluşur [11]. Diğer bir deyişle metrik tersleme dönüşümü

$$ds^2 \; = \; g_{AB} dx^A \, dx^B \; \rightarrow \; - \, ds^2 \tag{2.1}$$

şeklinde verilir.

Metrik tersleme dönüşümünün iki ayrı gerçekleşimi (realization) bulunmaktadır. İlki tüm koordinatların sanal $i$ sayısıyla çarpılmasıdır;

$$x^A \; \rightarrow \; i \, x^A \;\; , \;\; g_{AB} \; \rightarrow \; g_{AB} \;\; . \tag{2.2}$$

İkincisi ise metrik tensörün eksi ile çarpılmasıdır;

$$x^A \; \rightarrow \; x^A \;\; , \;\; g_{AB} \; \rightarrow \; -g_{AB} \;\; . \tag{2.3}$$

Bu iki gerçekleşimin de yerçekimsel eyleme etkisi aynıdır. Bu noktada ilginç bir gözleme varılır; yerçekimsel eylemin

$$S_R = \frac{1}{16\pi \, G} \int \sqrt{(-1)^S g} \, R \, d^D x \tag{2.4}$$

metrik terslemesi altında değişmez (invariant) kalması şartı ancak

$$D = 2(2n+1) \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, .... \quad . \tag{2.5}$$

boyutlu uzaylarda sağlanabilir. ((2.4) numaralı ifadedeki $S$ üst-endeksi uzaysal (spatial) boyut sayısını vermektedir.)

Öte yandan kozmolojik sabit eylemi

$$S_C = \frac{1}{8\pi \, G} \int \sqrt{g} \, \Lambda \, d^D x \tag{2.6}$$

metrik terslemesinin iki gösterimi altında aynı fakat yerçekimsel eylemden farklı olarak dönüşür. Bu nedenle metrik tersleme simetrisi $S_R$ ve $S_C$ terimlerinin aynı anda var olamayacağını öngörmektedir. Ayrıca $S_R$ eyleminin bu simetri altında değişmezliği uzayımızın $2(2n+1)$ boyutlu olmasını veya bilinen tüm kuvvetler ve maddenin daha büyük boyutlu bir uzayın $2(2n+1)$ boyutlu alt-uzayına hapsedildiği bir uzay olmasını ve bu uzayda kozmolojik sabitin sıfır olmasını öngörmektedir. Bu çerçevede, gözlenen kozmolojik ivmelenme bu simetrinin küçük miktarda kırınımıyla oluşan bir kozmolojik sabit yoluyla veya quientessence, değiştirilmiş yerçekimi gibi kozmolojik sabite alternatif mekanizmalar yoluyla açıklanabilmektedir.

[11] numaralı referansın ikinci ve üçüncü makalesinde değinilen önemli bir diğer noktaya daha değinmekte yarar vardır. Metrik tersleme simetrisinin her iki gerçekleşimi de yerçekimsel sektör (yani $S_R$ ve $S_C$) için aynı sonucu doğururken, madde eylemi için bu durum her zaman geçerli değildir. Her bir alanın bu simetri altındaki dönüşümü, ilgili eylemin kinetik kısmının simetri altında değişmez kalması ilkesinden yola çıkılarak bulunabilir. Böyle bir analizde, örneğin, her iki gerçekleşim skalar alan için aynı dönüşüm kuralını verirken ayar alanları için iki gerçekleşim farklı dönüşüm kuralları verirler. İki gerçekleşimin madde sektörü için farklı sonuçlarının olması, bu proje kapsamında üretilen [19] numaralı referanstaki modelin kurulmasında önemli bir rol oynamaktadır.

Bu bölümde kısaca bu projenin temel yapı taşı olan metrik tersleme simetrisini ve proje öncesi konumunu özetledik. Bu bölümde değinilen noktaları daha ayrıntılı olarak [11, 17, 18] numaralı referanslarda bulmak mümkündür. Bundan sonraki bölümlerde proje kapsamında yapılan çalışmalara değineceğiz.

# 3. Sıfır-Nokta Enerjileri Problemi ve Metrik Tersleme Simetrisi

Kuantum alan teorileri, kuantizasyon işleminin bir yan ürünü olarak, hiç fiziksel alan olmadığında dahi bir boşluk enerjisi öngörmektedir [25]. Bu enerji, sıfır-nokta enerjisi (veya Casimir enerjisi) olarak adlandırılır. Bu enerjiler boşluk sınır değerlerinin değişmesi durumunda Casimir kuvveti olarak adlandırılan bir kuvvete neden olurlar. Casimir kuvveti deneysel olarak gözlenirken sıfır-nokta enerjileri (eğer kuantum alan teorileri temel (fundamental) teoriler olarak görülürlerse) sonsuzdurlar ve gözlenemezler. Sonsuz enerji yoğunluğunun kabul edilemez olduğu açıktır. Eğer kuantum alan teorisi efektif bir teori olarak görülürse sıfır-nokta enerjilerinin değeri kuantum alan teorisinin geçerli olduğu en yüksek enerji mertebesindedir. Kuantum alan teorisi TeV enerji mertebesine kadar sorunsuz çalıştığına göre, beklenen en düşük sıfır-nokta enerji yoğunluğu, $E^4 \sim 1\,(TeV)^4$ gözlenen boşluk enerji yoğunluğunun, $\sim (10^{-3}\,eV)^4$ çok üstündedir. Fermiyon ve bosonların sıfır-nokta enerjilerinin ters işaretli olmaları nedeniyle birbirlerini götürdükleri varsayılabilir. Ancak bu götürmelerin, altta temel bir neden olmadan, sonucu $\sim 10^{-3}$ eV verecek kadar hassas bir şekilde gerçekleştiklerini söylemek kabul edilebilir değildir.

Yerçekiminin ihmal edildiği durumlarda sıfır-nokta enerjileri herhangi bir etki yaratmazlar bu nedenle normal sıralama (normal ordering) denen bir yöntemle elimine edilirler. Yerçekiminin ihmal edildiği durumlarda bir sistemin enerjisini (her yerde) bir sabit kadar değiştirmek fiziksel bir etki yaratmaz. Yerçekiminin ihmal edilemediği durumlarda ise normal sıralama yönteminin geçerliliği ve gerçekleştirme şekli tartışmalıdır. Genel görecelik teorisinde yerçekimi her tür enerjiyle etkileşir. Bu enerjinin her yerde sabit olması durumu değiştirmez. Ayrıca eliminasyon (normal sıralama) yöntemi geçerli kabul edilse bile elimine edilecek sabitin belirlenmesi de sorun olmaktadır. Bu soruna genel yaklaşım şu şekildedir: Madem Minkowski uzayında sıfır-nokta enerjileri uzayda eğrilik yaratmıyorlar, o zaman elimine edilecek sabitin Minkowski uzayı sıfır-nokta enerjileri olması gerekir. Yani bu yaklaşımda bir uzayın gözlenen sıfır-nokta enerjisi, o uzayın çıplak (bare) sıfır-nokta enerjisinden o uzayın düz-uzay limitine karşılık gelen sıfır-nokta enerjisi çıkarılarak bulunur [25]. Fakat düz-uzay limitindeki sıfır-nokta enerjisi de renormalizasyon enerji ölçeğine bağlıdır. Diğer bir deyişle, bu çıkarma işleminin hangi enerji ölçeğinde yapılarak gözlenen değerin bulunabileceği ayrıca yanıtlanması gereken bir noktadır (Yerçekiminin olduğu bir ortamda) bu çıkarma işlemini açıklayan temel bir teorik çerçeve olmadığı gibi bu çıkarma işlemi sonucu çıkan fiziksel niceliği (gözlenen boşluk enerji yoğunluğunu) başka bir enerji ölçeğinde test etme olanağı da yoktur [20]. Böyle bir renormalizasyon işlemi sonucunda çıkan enerji yoğunluğunun gözlemlerle uyuşup uyuşmadığı da tartışmalıdır. Bu tür hesaplamalarda kütlesiz alanlar için çıkan değer gözlenen boşluk enerji değerinin çok küçük bir kısmıdır [22]. Alanların kütleli olduğu durumda, renormalizasyon sonucu çıkan sonuç kütleler mertebesindedir ve (maksimum) gözlenen boşluk enerji düzeyi mertebesinde olabilmesi için regülarizasyonun, sadece nötrinoların olası katkısı kalacak şekilde yapılması gerekir [26, 27]. Bunun da geçerli bir nedeni yoktur. Bu nedenlerle sıfır-nokta enerjileri problemi de en azından kozmoloji açısından kozmolojik sabit problemi benzeri bir poblem olarak ortada durmaktadır. Aşağıda metrik tersleme simetrisi kullanılarak bu sorunun nasıl giderilebileceğini gösteren [19] numaralı makalenin bir özeti verilmektedir.

Toplam uzayımızın iki adet alt-uzayın birleşiminden oluştuğunu ve metriğinin şu şekilde alındığını varsayalım

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{AB}dx^A\,dx^B \;+\; g_{A'B'}dx^{A'}\,dx^{B'} \\ &= \Omega_z(z)[g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu \;+\; \tilde{g}_{ab}(y)\,dy^a dy^b] \;+\; \Omega_y(y)\tilde{g}_{A'B'}(z)\,dz^{A'}dz^{B'} \qquad (3.1) \\ & \quad \Omega_y(y) \;=\; \cos k|y|) \;\;,\;\; \Omega_z(z) \;=\; \cos k'|z| \qquad (3.2) \\ A,B &= 0,1,2,3,5,....N \;\;,\;\; N=2(2n+1) \;\;,\;\; A',B'=1',2',,....N' \;\;,\;\; N'=2(2m+1) \\ & \mu\nu=0,1,2,3\;,\;\; a,b=1,2,...,N-4\;\;,\;\; n,m=0,1,2,3......\;\;. \end{aligned}$$

Bundan böyle üssüz endeksler yukarıdaki $2(2n+1)$ boyutlu, üslü endeksler $2(2m+1)$ boyutlu uzayı tanımlayacaktır. Yukarıdaki ifadeden de anlaşılacağı gibi içinde yaşadığımız dört boyutlu uzay bu alt-uzaylardan üssüz olanı ($g_{AB}dx^A dx^B$) tarafından kapsanmaktadır.

Bu uzay metrik tersleme simetrisinin iki gerçekleşimini aşağıda verilen dönüşümler yoluyla sağlamakta olsun

$$ds^2 \;\rightarrow\; -\,ds^2 \;\;;\;\;\; x^A \;\rightarrow\; i\,x^A\,,\;\; x^{A'} \;\rightarrow\; i\,x^{A'}\,,\;\; g_{AB} \;\rightarrow\; g_{AB}\,,\;\; g_{A'B'} \;\rightarrow\; g_{A'B'} \qquad (3.3)$$

$$\Rightarrow\;\; \Omega_z \;\rightarrow\; \Omega_z\,,\;\; \Omega_y \;\rightarrow\; \Omega_y\,,\;\;\; g_{\mu\nu} \;\rightarrow\; g_{\mu\nu}\,,\;\; \tilde{g}_{ab} \;\rightarrow\; \tilde{g}_{ab}\,,\;\; \tilde{g}_{A'B'} \;\rightarrow\; \tilde{g}_{A'B'} \qquad (3.4)$$

ve

$$ds^2 \;\rightarrow\; -\,ds^2 \;\;;\;\;\; ky \;\rightarrow\; \pi \;-\; ky\,,\;\; k'z \;\rightarrow\; \pi \;-\; k'z\,,\;\; x^A \;\rightarrow\; x^A\,,\;\; x^{A'} \;\rightarrow\; x^{A'} \qquad (3.5)$$

$$\Rightarrow\;\; \Omega_z \;\rightarrow\; -\Omega_z\,,\;\; \Omega_y \;\rightarrow\; -\Omega_y\,,\;\; g_{\mu\nu} \;\rightarrow\; g_{\mu\nu}\,,\;\; \tilde{g}_{ab} \;\rightarrow\; \tilde{g}_{ab}\,,\;\; \tilde{g}_{A'B'} \;\rightarrow\; \tilde{g}_{A'B'}\;\;. \qquad (3.6)$$

[19] numaralı makalede ayrıntılı bir şekilde gösterildiği gibi yukarıdaki simetriler uzayın homojenite ve izotropisi koşulalarıyla birlikte (3.1)'deki $g_{\mu\nu}$'nün Minkoswki metriği olmasını gerektirir, yani (3.4) ve (3.6)'nin sağlanması durumunda, $g_{\mu\nu}$=$\eta_{\mu\nu} \;=\; diag(1,-1,-1,-1)$ şeklinde olur.

Yerçekimsel eylemi bir $R^2$ eylemi alalım

$$\begin{aligned} S_R \;&=\; \frac{1}{16\pi\,\tilde{G}}\int dV\;\tilde{R}^2 \qquad (3.7) \\ & dV \;=\; dV_1\,dV_2\;,\;\; dV_1 \;=\; \sqrt{g(-1)^S}\,d^Nx\;,\;\; dV_2 \;=\; \sqrt{g'(-1)^{S'}}\,d^{N'}x' \qquad (3.8) \\ & \tilde{R} = R(x) + R'(x') \qquad (3.9) \end{aligned}$$

(3.5) ve (3.6) numaralı ifadede verilen dönüşümler altında

$$dV_1 \;\rightarrow\; -\,dV_1\,,\;\; dV_2 \;\rightarrow\; dV_2 \quad\;;\;\;\; ky \;\rightarrow\; \pi \;-\; ky\,,\;\; x^A \;\rightarrow\; x^A\,,\;\; x^{A'} \;\rightarrow\; x^{A'} \qquad (3.10)$$

$$dV_1 \;\rightarrow\; dV_1\,,\;\; dV_2 \;\rightarrow\; -\,dV_2 \quad\;;\;\;\; k'z \;\rightarrow\; \pi \;-\; k'z\,,\;\; x^A \;\rightarrow\; x^A\,,\;\; x^{A'} \;\rightarrow\; x^{A'} \qquad (3.11)$$

$$R \;\rightarrow\; R\,,\;\; R' \;\rightarrow\; -R' \;\;;\;\;\; ky \;\rightarrow\; \pi \;-\; ky\,,\;\; x^A \;\rightarrow\; x^A\,,\;\; x^{A'} \;\rightarrow\; x^{A'} \qquad (3.12)$$

$$R \;\rightarrow\; -R\,,\;\; R' \;\rightarrow\; R' \;\;;\;\;\; k'z \;\rightarrow\; \pi \;-\; k'z\,,\;\; x^A \;\rightarrow\; x^A\,,\;\; x^{A'} \;\rightarrow\; x^{A'}\;\;. \qquad (3.13)$$

$$dV = dV_1 dV_2 \rightarrow -dV \tag{3.14}$$

$$R^2 \rightarrow R^2\,, \;\; R'^2 \rightarrow R'^2\,, \;\; R\,R' \rightarrow -R\,R' \tag{3.15}$$

(3.14) ve (3.15'un sonucu olarak(3.7'deki integral şuna indirgenir

$$\begin{aligned} S_R &= \frac{M^{N+N'-4}}{16\pi\,\tilde{G}}\int\sqrt{(-1)^S g}\sqrt{(-1)^{S'}g'}\,2\,R(x)\,R'(x')\,d^N x\,d^{N'}x' \\ &= \frac{1}{16\pi\,G}\int\sqrt{(-1)^S g}\,R(x)\;d^N x \end{aligned} \tag{3.16}$$

burada

$$\frac{1}{16\pi\,G} = M_{pl}^2(\frac{M}{M_{pl}})^2 M^{N+N'-6}\frac{1}{16\pi\,\tilde{G}}\int\sqrt{(-1)^{S'}g'}\,2\,R'(x')\,d^D x' \tag{3.17}$$

Diğer bir deyişle bu eylem simetrinin her iki gerçekleşimini de sağlamakta ve efektif olarak bildiğimiz dört boyutlu Einstein-Hilbert eylemine indirgenmektedir.

Şimdi bu bölümün omurgasını oluşturan kısma geldik. Daha önce de değindiğimiz gibi, enerji-momentum tensörünün ve boşluk beklenen değerinin aynı simetriyi sağlaması nedeniyle, normalde biri sıfırdan farklıysa diğeri de sıfırdan farklı olur veya biri sıfırsa diğeri de sıfır olur. Gözlenen bir alanın enerji-momentum tensörünün sıfır olması beklenemez. En az bir bileşeninin sıfırdan farklı olması gerekir. Bir simetri bir alanın Lagrangian'nın sıfırdan farklı olmasına izin veriyorsa, karşılık gelen enerji-momentum tensörünün, aksini gerektiren bir neden olmadıkça, genelde sıfırdan farklı olması gerekir. Bu durumda bir simetri bir alanın fiziksel olarak gözlenmesine izin verirken bu alanın enerji-momentum tensörünün boşluk beklenen değerinin, bunu zorlayan başka bir simetri olmadıkça, sıfır olmasını beklemek olanaklı değildir. Bu durum, metrik tersleme simetrisinin basit bir model üzerinden sıfır-nokta enerji problemini çözmesine bir engel oluşturur. Bu metrik tersleme simetrisinin iki gerçekleşimini aynı anda kullanmayı gerekli kılmaktadır. Madde Lagrangian'ı, bu gerçekleştirimlerden birinin küçük bir kırılımıyla olanaklı hale gelirken, kırılmayan gerçekleşim (realization) enerji-momentum tensörünün boşluk beklenen değerinin sıfır olmasını sağlayarak sıfır-nokta enerji problemini çözmektedir. İlerde görececimiz gibi, bu durum aslında otomatik bir regülarizasyona yani normal sıralamaya karşılık gelmektedir. Madde eylemini şu şekilde alalım

$$S_M = \int dV\,\mathcal{L}_M \tag{3.18}$$

$$dV = \sqrt{(-1)^S g}\sqrt{(-1)^{S'}g'}\,d^D x\,d^D x'$$

Metrik tersleme simetrisinin (3.3) (ve (3.4))'de verilen gerçekleşimi altında

$$x^{A(A')} \rightarrow i\,x^{A(A')}\,, \;\; g_{AB(A'B')}) \rightarrow g_{AB(A'B')} \quad \Rightarrow \quad dV \rightarrow dV \tag{3.19}$$

Bu nedenle, genelde, simetrinin (3.3) (ve (3.4)) ile verilen gerçekleşimi (3.18) tarafından kırılır. Örneğin (3.3) (ve (3.4)) skalar alanların kinetik terimi tarafından kırılır. (3.3)'nin kırınımı sonunda aşağıdaki alt-grupun kaldığını varsayıyoruz

$$x^A \rightarrow -x^A \;\;, \quad x^{A'} \rightarrow -x^{A'} \tag{3.20}$$

Toplam eylemin, (3.20)'teki dönüşümün her iki alt-uzaya ayrı ayrı etkimesi sonucunda değişmez kalması koşulu getiriyoruz. Ayrıca bildiğimiz dört boyutlu uzaya etki eden

$$x \rightarrow -x\;\;. \tag{3.21}$$

PT dönüşümleri altında değişmezlik varsayıyoruz. $dV$, (3.20) ve (3.21) altında değişmez olduğundan $\mathcal{L}_{SM}$'nin bu simetriler altında değişmez olması için $S_M$'nin bu simetriler altında değişmez kaldığını varsaymak yeterlidir.

Lagrangian'nın (dolayısıyla Hamiltonian'nın) (3.20) ve (3.21)altında değişmez olması nedeniyle alanların,(3.20) ve (3.21)'nin öz-vektörleri olması ve Lagrangian'da karışmıyor olmaları gerekir. Bu bilginin ışığında bir skalar alan, Kaluza-Klein modları (diğer deyişle ek boyutlu Fourier modları) cinsinden şöyle ifade edilebilir.

$$\phi_{AA}(x,y,z) = \sum_{n,m} \phi^{AA}_{n,m}(x)\, \sin(n\,ky)\, \sin(m\,k'z) \tag{3.22}$$

$$\phi_{AS}(x,y,z) = \sum_{n,m} \phi^{AS}_{n,m}(x)\, \sin(n\,ky)\, \cos(m\,k'z) \tag{3.23}$$

$$\phi_{SA}(x,y,z) = \sum_{n,m} \phi^{SA}_{n,m}(x)\, \cos(n\,ky)\, \sin(m\,k'z) \tag{3.24}$$

$$\phi_{SS}(x,y,z) = \sum_{n,m} \phi^{SS}_{n,m}(x)\, \cos(n\,ky)\, \cos(m\,k'z) \tag{3.25}$$

$$k = \frac{\pi}{L}\,,\ k' = \frac{\pi}{L'}\,,\ \ 0 \le\ y\ \le\ L\,,\ \ 0 \le\ z\ \le\ L'\ \ ,\quad n,m = 0,1,2,.....$$

burada $x$ normal dört boyutlu koordinatlar, $y$, $z$ ek boyutlu koordinatlar için kullanılmaktadır. Fermiyonlar durumunda (3.22-3.25)'daki $m$,$n$'nin $\frac{n}{2}$, $\frac{m}{2}$ ile yer değiştirmesi gerekir. Ayar alanları durumuda ise yukarıdaki ek boyutlu mod açılımı aynı olup sadece her alana uzay-zaman endeksi eklemek gerekir. (3.22-3.25) şöyle de yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\phi_{AA}(x,y,z) &= \frac{1}{2}\sum_{n,m}(\, \phi^{AA}_{n,m}(x) \,-\, \phi^{AA}_{-n,m}(x)\,)\sin(n\,ky)\, \sin(m\,k'z) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n,m}(\, \phi^{AA}_{n,m}(x) \,-\, \phi^{AA}_{n,-m}(x)\,)\sin(n\,ky)\, \sin(m\,k'z) \qquad (3.26) \\
\phi_{AS}(x,y,z) &= \frac{1}{2}\sum_{n,m}(\, \phi^{AS}_{n,m}(x) \,-\, \phi^{AS}_{-n,m}(x)\,)\sin(n\,ky)\, \cos(m\,k'z) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n,m}(\, \phi^{AS}_{n,m}(x) \,+\, \phi^{AS}_{n,-m}(x)\,)\sin(n\,ky)\, \cos(m\,k'z) \qquad (3.27) \\
\phi_{SA}(x,y,z) &= \frac{1}{2}\sum_{n,m}(\, \phi^{SA}_{n,m}(x) \,+\, \phi^{SA}_{-n,m}(x)\,)\sin(n\,ky)\, \sin(m\,k'z) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n,m}(\, \phi^{SA}_{n,m}(x) \,-\, \phi^{SA}_{n,-m}(x)\,)\cos(n\,ky)\, \sin(m\,k'z) \qquad (3.28) \\
\phi_{SS}(x,y,z) &= \frac{1}{2}\sum_{n,m}(\, \phi^{SS}_{n,m}(x) \,+\, \phi^{SS}_{-n,m}(x)\,)\cos(n\,ky)\, \cos(m\,k'z) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n,m}(\, \phi^{SS}_{n,m}(x) \,+\, \phi^{SS}_{n,-m}(x)\,)\cos(n\,ky)\, \cos(m\,k'z)\ \ . \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki $A$, $S$ alt-endeksleri alanın $n$, $m$ mod endekslerinin $n\to -n$, $m \to -m$ altında anti-simetrik veya simetrik olduğunu göstermektedir. Örneğin $\phi_{AA}$'daki $AA$ alt-endeksleri, bu alanın hem $n$'nin hem de $m$'nin işaret değiştirmesi altında anti-simetrik olduğunu gösterirken

$\phi_{AS}$'daki $AS$ alt-endeksi, bu alanın $n \to -n$ altında anti-simetrik, $m \to -m$ altında simetrik olduğunu ifade etmektedir. Yukarıda verilen öz-vektörlerin bu simetri özellikleri biraz sonra yapacağımız analizde önemli olacaktır.

Şimdi yukarıda verilen teorik çerçevede serbest skalar bir alanın enerji-momentum tensörünün boşluk beklenen değerini bulacağız. Buradaki analizin diğer alanlara genelleşirilmesi ve skalar alan örneği ile ilgili daha fazla ayrıntı [19] numaralı referansta bulunabilir. Lagrangian'nın kinetik kısmını inceleyelim. (3.1)'de verilen uzaydaki bir skalar için genel kinetik terim şöyle ifade edilebilir

$$\mathcal{L}_{\phi\, k} = \mathcal{L}_{\phi\, k1} + \mathcal{L}_{\phi\, k2} \tag{3.30}$$

$$\mathcal{L}_{\phi\, k1} = \frac{1}{2} g^{AB} \partial_A \phi \partial_B \phi \;\;,\quad \mathcal{L}_{\phi\, k2} = \frac{1}{2} g^{A'B'} \partial_{A'} \phi \partial_{B'} \phi \;\;. \tag{3.31}$$

Analizi basitleştirmek için $\tilde{g}_{ab} = -\delta_{ab}$, $g_{A'B'} = -\delta_{A'B'}$ alalım. Temel noktaları görmek için alt-uzayların boyutlarını $N = 6$, $N = 2$ almak ve alanı $\phi_{SS}$ olarak almak yeterlidir. Ek boyutlar üzerinden integral alındıktan sonra, bu duruma karşılık gelen eylem (Ek 1'de açıkça hesaplandığı gibi)

$$\begin{aligned}
S_{\phi k} \;=\; & \frac{1}{8}(LL')^2 \int d^4x \, \{ 4\partial_\mu [\, \phi_{1,2}(x) + \phi_{1,0}(x) ]\, \partial_\nu (\, \phi_{0,0}(x)\, ) \\
& + 4\partial_\mu [\, \phi_{0,2}(x) + \phi_{0,0}(x) + \phi_{2,2}(x) + \phi_{2,0}(x) ]\, \partial_\nu (\, \phi_{1,0}(x)\, ) \\
& + 4\eta^{\mu\nu} \sum_{r=1,s=1}^{\infty} \partial_\mu [\, \phi_{|r-1|,|s-2|}(x) + \phi_{|r-1|,s+2}(x) \\
& + 2\phi_{|r-1|,s}(x) + \phi_{r+1,|s-2|}(x) + \phi_{r+1,s+2}(x) + 2\phi_{r+1,s}(x)\, ] \partial_\nu (\, \phi_{r,s}(x)\, ) \\
& -4k^2 \sum_{r=1,s=0} r [\, (|r-1|)(\, \phi_{|r-1|,|s-2|}(x) + \phi_{|r-1|,s+2}(x) + 2\, \phi_{|r-1|,s}(x)\, ) \\
& + (r+1)(\, \phi_{r+1,|s-2|}(x) + \phi_{r+1,s+2}(x) + 2\, \phi_{r+1,s}(x)\, ) - \phi_{r+1,s}(x)\, )\, ] \phi_{r,s}(x) \\
& -4\frac{1}{2}k'^2 \sum_{r=0,s=1} s\, [\, (|s-3|)\phi_{r,|s-3|}(x) + (s+3)\, \phi_{r,s+3}(x) \\
& + 3(|s-1|)\, \phi_{r,|s-1|}(x) + 3(s+1)(\, \phi_{r,s+1}(x)\, ]\, \phi_{r,s}(x) \} \;\; .
\end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklinde verilir. $\phi_{AS}$ $\phi_{SA}$ $\phi_{AA}$ içinki sonuçlar form olarak yukarıdaki ile aynıdır. Çünkü yukarıda ek boyutlar üzerinden integral ancak iki kosinüs veya iki sinüsün bir araya gelmesi durumunda sıfırdan farklıdır ve katsayılar dışında tüm bu alanlar için aynı sonucu verirler. Ancak bunlardan sadece $\phi_{SS}$, $n = 0$, $m = 0$ modunu taşır. Bu modu sıfır mod olarak adlandıracağız ve standart parçacıklarla özdeşleştireceğiz. Bu nedenle sadece $\phi_{SS}$ modunu incelemek yeterli olacaktır. Kütle teriminin de iki alan taşıması nedeniyle yukarıdakine benzer bir ifade kütle terimi için de bulunur.

(3.32) numaralı ifadenden elde ettiğimiz enerji-momentum tensörünün sıfır modu taşıyan kısmı şu şekilde verilir:

$$T^\nu_\mu \;=\; \frac{2}{\sqrt{(-1)^S g}\sqrt{(-1)^{S'} g'}} g_{\mu\rho} \frac{\delta\, S_M}{\delta\, g_{\nu\rho}} = 2\partial_\mu\, \phi_{1,0}(x)\, \partial^\nu\, \phi_{0,0}(x) \tag{3.33}$$

(Tüm modların verildiği ayrıntılı ifade [19] numaralı referansta verilmektedir ve yukarıdakiyle benzer formdadır. Yukarıdaki ifade temel noktaları vurgulamak için yeterlidir.) Bu enerji-momentum tensörünün boşluk beklenen değeri alanın (yaratma ve yok etme operatörleri cinsinden)

$$\phi_{n,m}(x) \,=\, \sum_{\vec{k}} [\, a_{n,m}(\vec{k})\, e^{-iEt} e^{i\vec{k}.\vec{x}} \,+\, a^{\dagger}_{n,m}(\vec{k})\, e^{iEt} e^{-i\vec{k}.\vec{x}}\,] \;\;. \tag{3.34}$$

olarak ifade edilmesi ve $a_{r,s}|0>=\,0$ ve $n\neq r$ ve/veya $m\neq s$ için $[\,a_{n,m},\, a^{\dagger}_{n,m}]=0$ olması nedeniyle

$$<0|T^{\nu}_{\mu}|0> \propto\, <0|\,a_{n,m}a^{\dagger}_{r,s}|0>=\,0\;,\;\; <0|\,a^{\dagger}_{r,s}a_{r,s}|0>=\,0 \qquad n\neq r \quad \text{ve/veya} \quad m\neq s \tag{3.35}$$

olarak bulunur. Kütle teriminin (3.32)'e benzer formda olması nedeniyle enerji-momentum operatörünün kütleden gelen kısmının boşluk beklenen değeri de aynı şekilde sıfır verir. Aslında bu sonuç tüm Lagrangian terimleri için geçerlidir. Metrik tersleme simetrisinin (3.6) ile verilen gerçekleşimi her terimde en az bir alan çiftinin Kaluza-Klein modlarının köşegen-olmayan (off-diagonal) şekilde etkileşmesine neden olur. Bu da yukarıdaki argümana benzer şekilde enerji-momentum tensörünün boşluk beklenen değerinin sıfır olmasına neden olur.

Yukarıdaki sonucu başka bir açıdan görmek, olup biteni daha iyi anlamak açısından yararlı olacaktır. (3.33)'daki enerji-momentum tensörü şu şekilde köşegenleştirilebilir (can be diagonalized)

$$T^{\nu}_{\mu} \;\;=\;\; (\partial_{\mu}\phi_1(x)\partial^{\nu}\phi_1(x)) \,-\, \partial_{\mu}\phi_2(x)\partial^{\nu}\phi_2(x)) \tag{3.36}$$

Burada

$$\phi_1 \,=\, \phi_{0,0} \,+\, \phi_{1,0} \quad , \quad \phi_2 \,=\, \phi_{0,0} \,-\, \phi_{1,0} \tag{3.37}$$

şeklinde verilmektedir. Dolayısıyla $\psi_1$ ile $\psi_2$ arasında simetri alınması durumunda (3.35) otomatikman elde edilmektedir. Bu aslında Linde'nin kozmolojik sabit problemi için önerdiği ad hoc modele karşılık gelmektedir [28,29]. Linde'nin modeli tamamen ad hoc bir şeklide önerilmişken buradaki bu sonuç teorik bir çerçevenin doğal bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır. Bu teorik çerçevede en doğal sonuç toplam sıfır-nokta enerjilerinin sıfır olmasıdır. Kozmolojik olarak veya yüksek enerji fiziği açısından bunun her hangi bir teorik veya emprik sorunu bulunmamaktadır. Ancak, [19]'da gösterildiği gibi, istenirse simetrinin küçük miktarda kırınımı yoluyla küçük sıfır-nokta enerjileri elde edilebilir.

Metrik tersleme simetrisinin sıfır-enerji problemi için nasıl kullanılabileceğini yukarda özetledik. Bu çerçevede ayrıntılı bir analiz [19]'da bulunabilir. Bir sonraki bölümde metrik tersleme simetrilerinin ilginç bir Kaluza-Klein spektrumu elde etmekte nasıl kullanılabileceğini göreceğiz. Konformal faktörün perdelemesi sonucu ek boyutlardan daha büyük uzunluk ölçeklerinde, zaten üretilmiş bulunsalar bile, sonlu sayıdaki mod dışında hiç bir Kaluza-Klein modunun gözlenemediği ilginç bir olasılığa varacağız [23].

# 4. Metrik Tersleme Simetrisi Yoluyla, Sonlu Sayıda Kütlesiz Kaluza-Klein Modlarının Oluşturulması

Bu bölümde, uygun sınır koşullarının konması durumunda metrik tersleme simetrisinin Klauza-Klein modlarının spektrumu ve gözlenebilirliğine ilişkin ilginç sonuçlar verebileceğini fermiyon alanları özelinde, beş boyutlu bir model çerçevesinde göreceğiz. Burada özetlenen analizin ayrıntılı bir şekli [23] numaralı referansın ikinci makalesinde verilmektedir.

Metriği aşağıda verilen beş boyutlu uzayı gözönüne alalım

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{BC}\, dx^B dx^C \,=\, \cos kz\, \left(g_{\bar{B}\bar{C}}\, dx^{\bar{B}} dx^{\bar{C}}\right) \\ &= \cos k\, z \left[\, g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\,(x)\; dx^{\bar{\mu}} dx^{\bar{\nu}} -\, dz^2\,\right] \\ & \quad B, C, \bar{B}, \bar{C} \,=\, 0,1,2,3,4 \quad , \qquad \bar{\mu}, \bar{\nu} \,=\, 0,1,2,3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

burada endeks taşımayan $x$ bildiğimiz dört-boyutlu uzay-zaman koordinatlarını göstermektedir ve beşinci boyut $L$ uzunluğunda kompakt alınmış olup $k \,=\, \frac{2\pi}{L}$ şeklindedir. Bundan sonraki kısımlarda modeli basitleştirmek için $g_{\bar{B}\bar{C}} \,=\, \eta_{\bar{B}\bar{C}} \,=$ diag$(1,-1,-1,-1,-1)$ (ve $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \,=\, \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$) alınmaktadır.

Genel bir $\chi$ alanı beşinci koordinatın Fourier modları (Kaluza-Klein modları) cinsinden şöyle ifade edilebilir

$$\chi \,=\, \chi_{\mathcal{A}} + \chi_{\mathcal{S}} \tag{4.2}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}\,(x,z) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n^{\mathcal{A}}\,(x)\; \sin\left(\frac{1}{2} n\, kz\right) \,=\, \sum_{|n|=1}^{\infty} \tilde{\chi}_{|n|}^{\mathcal{A}}\,(x)\; \sin\left(\frac{1}{2}|n|\, kz\right) \tag{4.3}$$

$$\chi_{\mathcal{S}}\,(x,z) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n^{\mathcal{S}}\,(x)\; \cos\left(\frac{1}{2} n\, kz\right) \,=\, \chi_0\,(x) \,+\, \sum_{|n|=1}^{\infty} \tilde{\chi}_{|n|}^{\mathcal{S}}(x)\; \cos\left(\frac{1}{2}|n|\, kz\right) \tag{4.4}$$

$$\tilde{\chi}_{|n|}^{\mathcal{A}}\,(x) \,=\, \chi_n^{\mathcal{A}}\,(x) \,-\, \chi_{-n}^{\mathcal{A}}(x) \;\; , \;\; \tilde{\chi}_{|n|}^{\mathcal{S}}\,(x) \,=\, \chi_n^{\mathcal{S}}\,(x) \,+\, \chi_{-n}^{\mathcal{S}}(x)$$

burada $|n|$ notasyonu toplamın pozitif sayılar üzerinden olduğunu vurgulamak için kullanılmaktadır. Yukarıdaki ifadelerde $n$'nin tam sayı değerleri periyodik, buçuklu değeleri ise anti-periyodik sınır koşullarına karşılık gelmektedir.

Yukarıdaki Kaluza-Klein modlarının şu simetriye sahip olduklarını varsayacağız.

$$x^a \,\rightarrow\, -\,x^a \quad , \qquad a \,=\, 0,1,2,3,4 \tag{4.5}$$

$$\chi_n\,(x)\;\rightarrow\;(-1)^{\lambda_n}\;\mathcal{CPT}\;\chi_n\,(-x)\qquad,\qquad\lambda_n=\frac{1}{2}\,(-1)^{\frac{n}{2}}\tag{4.6}$$

Burada notasyonu basitleştirmek için modların $A$ ve $S$ endeksleri ihmal edilmiştir ve $\mathcal{CPT}$ dört boyutlu CPT operatörünün spinörlere etki eden kısmına karşılık gelmektedir. (4.5) ve (4.6) numaralı dönüşümler altında eylemin değişmez kalma koşulu kinetik terimin aşağıdaki formda olmasını gerektirir.

$$i\bar{\chi}_{\mathcal{S}}\gamma^a\partial_a\chi_{\mathcal{S}}\quad\text{ve/veya}\quad i\bar{\chi}_{\mathcal{A}}\gamma^a\partial_a\chi_{\mathcal{A}}\tag{4.7}$$

Diğer deyişle Lagragian'ın (4.7)'daki ifadelerin lineer kombinasyonu şeklinde olması gerekir.

Sağlanmasını isteyeceğimiz bir diğer simetri de metrik tersleme simetrisinin aşağıdaki gösterimidir.

$$k\,z\;\rightarrow\;\pi\;+\;k\,z\tag{4.8}$$

Bu uzayda fermiyon kinetik terimine karşılık gelen eylem şu şekildedir.

$$\begin{aligned} S_f \;&=\; \int(\cos kz)^{\frac{5}{2}}\,\mathcal{L}_f\,d^4x\,dz\\ &=\;\int(\cos kz)^2\;i\bar{\chi}\gamma^a\left(\partial_a\;+\;\frac{k}{8}\tan kz\;[\,\gamma_4\;,\;\gamma_a]\right)\chi\;d^4x\,dz\;+\;H.C.\\ &\left\{\gamma^a,\gamma^b\right\}\;=\;2\eta^{ab}\;\;,\;\;\left(\eta^{ab}\right)=\text{diag}\,(1,-1,-1,-1,-1)\end{aligned}\tag{4.9}$$

(4.8)'daki dönüşüm altında hacim elemanı şu şekilde dönüşür.

$$(\cos k\,z)^{\frac{5}{2}}\,d^4x\,dz\;\rightarrow\;\sqrt{-1}\,(\cos k\,z)^{\frac{5}{2}}\,d^4x\,dz\tag{4.10}$$

Bunu (4.9) eyleminin değişmezliği prensibi ile birleştirirsek $i\bar{\chi}\gamma^a\partial_a\chi$'nin (4.8) altında değişmez olması gerektiğini buluruz. Ayrıca alanın anti-periyodik sınır şartlarını (yani $\chi\,(z=0)=-\chi\,(z=L)$) sağlaması koşulunu getiriyoruz. Bu nedenle (4.2-(4.4)'daki $n$'leri buçuklu sayı alıyoruz. Eylemin (4.6) ve (4.8) altında değişmez olması koşulu altında kinetik terim eylemi şu şekilde bulunur.

$$\begin{aligned}&\sum_{r,s=0}^{\infty}\int\,d^4x\,i\bar{\chi}_{(2|r|+1)}\gamma^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\chi_{(2|s|+1)}\\ &\times 2\int\,dz\;(\cos kz)^2\;\left[\cos\frac{2|r|+1}{2}kz\;\cos\frac{2|s|+1}{2}kz\;-\;\sin\frac{2|r|+1}{2}kz\;\sin\frac{2|s|+1}{2}kz\right]\;+\;H.C.\\ =\;&\sum_{r,s=0}^{\infty}\int\,d^4x\;i\bar{\chi}_{(2|r|+1)}\gamma^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\chi_{(2|s|+1)}\int_0^L dz\;(\cos 2kz+1)\;\cos\left(|r|+|s|+1\right)kz\;+\;H.C.\\ =\;&\frac{1}{2}\sum_{r,s=0}^{\infty}\int\;d^4x\,i\bar{\chi}_{(2|r|+1)}\gamma^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\chi_{(2|s|+1)}\int_0^L dz\;[\,\cos\left(|r|+|s|-1\right)kz\,]\;+\;H.C.\end{aligned}\tag{4.11}$$

(Yukarıdaki ifadenin ayrıntılı bir çıkarımı için Ek 2'ye bakınız.) Burada $2r{+}1=4l{+}1$, $2s{+}1=4p{+}3$ $(l,p=0,1,2,...)$ ve tam tersidir, ve $H.C.$ önündeki ifadenin Hermitian konjugesini ifade etmektedir. (4.11) ifadesi ancak kosinüsün içinin sıfır olması durumunda sıfırdan farklıdır. Bu durum endeksler üzerine şu koşulu koyar

$$|r|+|s|-1=0\quad\Rightarrow\qquad r=0\;\;,\;\;s=1\quad\text{veya}\quad s=1\;\;,\;\;r=0\tag{4.12}$$

Bunun sonucu olarak (4.11)'deki integral

$$\frac{L}{2}\int d^4x\,[\,i\bar{\chi}_1\gamma^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\chi_3\,+\,i\bar{\chi}_3\gamma^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\chi_1\,]\,+\,H.C. \tag{4.13}$$

olur. Bu sonuç aşağıdaki köşegen formda da ifade edilebilir.

$$\frac{1}{2}L\int d^4x\left[i\bar{\psi}\gamma^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\psi\,-\,i\bar{\tilde{\psi}}\gamma^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\tilde{\psi}\right]\,+\,H.C. \tag{4.14}$$

$$\psi\,=\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\,\chi_1\,+\,\chi_3\,)\ \ ,\ \ \tilde{\psi}\,=\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\,\chi_1\,-\,\chi_3\,) \tag{4.15}$$

Yani yüksek uzunluk ölçeklerinde fermiyon spektrumu bir normal fermiyon ve bir hayalet fermiyondan oluşur. Konformal faktörlerin üssü ve/veya ek boyut sayısı artırılarak gözlenen paraçacık sayısını arttırmak mümkündür [23]. Ayrıca [23]'de gösterildiği gibi, kinetik terimin ek boyutlu kısmından ve spin-bağlantıdan (spin-connection) her hangi bir kütle katkısı gelmez.

# 5. Metrik Tersleme Simetrisi, Kaluza-Klein Modları, Otomatik Pauili-Villars-Benzeri Bir Regülarizasyon

Bu bölümde, (metrik tersleme simetrisi yoluyla elde edilen) Kaluza-Klein modları karışımının otomatik, Pauili-Villars-benzeri bir kuantum alan teorisi regülarizasyonu oluşturmak için kullanılabileceğini göstereceğiz. Aslında burada elde edilen teorik çerçevenin önemi bunun daha da ötesindedir. Standart yaklaşımda, Kaluza-Klein modları kuantum alan teorisindeki sonsuzluklar problemini azdırırlar. Çünkü ek boyutlu kompakt uzaylarda Feynman diyagramlarının iç halkalarında (loop) dört boyutlu uzaydaki kuantum alan teorilerindeki her bir alan için onun Kaluza-Klein modları olan, kütle dışında birbirinin tıpkısı sonsuz sayıda alanın propagatörleri bulunur. Bu durum başlı başına söz konusu diyagramın sonucunun sonsuza gitmesine neden olur. Aşağıdaki analizde göreceğimiz gibi, burada verilen model de ise tam tersine Kaluza-Klein modlarının regüle edici bir rolu vardır. Bu bölümde verilen analiz daha ayrıntılı biçimiyle [24] numaralı referansta bulunabilir.

Aşağıda verilen yedi-boyutlu uzayı ele alalım

$$ds^2 \;=\; g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu - \cos^2 k_2 y_2\,[\,dy_1^2\,+\,\cos^2 k_3 y_3 dy_2^2\,+\,dy_3^2\,] \qquad \mu,\nu\;=\;0,1,2,3 \quad (5.1)$$

ve şu simetriyi varsayalım

$$x^a \;\rightarrow\; -\,x^a \;\;, \quad a = 0,1,2,3,5 \quad (5.2)$$

$$x^b \;\rightarrow\; -\,x^b \;\;, \quad b = 0,1,2,3,6 \quad (5.3)$$

burada $x^5 = y_1$, $x^6 = y_2$ olarak alınmıştır. Bu simetri altında bir alanın, $z$ ek boyutuna karşılık gelen Fourier modları (Kaluza-Klein modları) cinsinden açılımı şu şekildedir.

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\, \alpha_n(x)\ \sin(\frac{1}{2} n\, kz) \,+\, \beta_n(x)\ \cos(\frac{1}{2} n\, kz)\,] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{|n|}(x)\ \sin(\frac{1}{2}|n|\, kz) \,+\, \tilde{\varphi}_{|n|}(x)\ \cos(\frac{1}{2}|n|\, kz) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\, a_{|n|}\ \sin(\frac{1}{2}|n|\, kz) \,+\, b_{|n|}\ \cos(\frac{1}{2}|n|\, kz)\,]\, \varphi_{|n|}(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \{\, f_{|n|}[\cos(\frac{|n|kz}{2}) + \sin(\frac{|n|kz)}{2})] \,+\, g_{|n|}[\cos(\frac{|n|kz)}{2}) - \sin(\frac{|n|kz)}{2})]\,\}\varphi_{|n|}(x)
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{|n|}(x) \,=\, \alpha_{|n|}(x) - \alpha_{-|n|}(x) \quad , \quad \tilde{\varphi}_{|n|}(x) \,=\, \beta_{|n|}(x) + \beta_{-|n|}(x) \\
&f_{|n|} \,=\, \frac{1}{2}(b_{|n|} \,+\, a_{|n|}) \quad , \quad g_{|n|} \,=\, \frac{1}{2}(b_{|n|} \,-\, a_{|n|}) \quad , \quad a_{|n|}^2 + b_{|n|}^2 \,=\, 1 \\
&z = y_1, y_2 \quad , \quad k = k_1, k_2
\end{aligned}
$$

burada $a_{|n|}, b_{|n|}, f_{|n|}, g_{|n|}$ bazı sabitlerdir. Ayrıca modların aşağıda verilen şekilde dönüştüğünü varsayalım.

$$x^a \,\rightarrow\, -x^a \quad \Rightarrow \quad \varphi_{n,m,r}(x) \,\rightarrow\, \xi^{\lambda_n}\mathcal{CPT}\,\varphi_{n,m,r}(-x) \tag{5.5}$$

$$x^b \,\rightarrow\, -x^b \quad \Rightarrow \quad \varphi_{n,m,r}(x) \,\rightarrow\, \xi^{\lambda_m}\mathcal{CPT}\,\varphi_{n,m,r}(-x) \tag{5.6}$$

$$x^a \,\rightarrow\, -x^a \quad , \quad x^b \,\rightarrow\, -x^b \quad \Rightarrow \quad \varphi_{n,m,r}(x) \,\rightarrow\, \xi^{\lambda_n+\lambda_m}\mathcal{CPT}\,\varphi_{n,m,r}(x) \tag{5.7}$$

$$\lambda_n = \frac{i}{2}(-1)^{\frac{n}{2}} \quad \lambda_m = \frac{i}{2}(-1)^{\frac{m}{2}} \qquad a = 0,1,2,3,5 \;\; ; \;\; b = 0,1,2,3,6$$

Burada $n$, $m$, $r$, sırasıyla $y_1$, $y_2$, $y_3$ yönündeki mod numaralarıdır, $\xi$ ise 1 ve -1'den farklı bir sayıyı, $\mathcal{CPT}$ ise dört boyutlu CPT dönüşümünün spinorlere etki eden parçasını göstermektedir. Yukarıdaki dönüşümler şu şekilde de ifade ifade edilebilir.

$$
\begin{aligned}
&n = 4l+1\,,\; m = 4p+1 \quad \text{ise} \quad \varphi_{n,m,r}(x) \,\rightarrow\, \xi^{\mp 1}\mathcal{CPT}\,\varphi_{n,m,r}(-x) \\
&n = 4l+1\,,\; m = 4p+3 \quad \text{veya} \quad n = 4l+3\,,\; m = 4p+1 \quad \text{ise} \quad \varphi_{n,m,r}(x) \,\rightarrow\, \mathcal{CPT}\,\varphi_{n,m,r}(-x) \\
&n = 4l+3\,,\; m = 4p+3 \quad \text{ise} \quad \varphi_{n,m,r}(x) \,\rightarrow\, \xi^{\pm 1}\mathcal{CPT}\,\varphi_{n,m,r}(-x) \\
&l, p = 0,1,2, .....
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

İlerideki analizimiz için (5.8), (5.7)'den daha uygun bir formdadır.

Bu uzayda (yani (5.1) ile verilen uzayda) $\mathcal{L}_f$ Lagrangian'lı madde eylemi

$$S_f \;=\; \int \mathcal{L}_f\ \cos^3 k_2 y_2\ \cos k_3 y_3\, d^4x\, dy_1\, dy_2\, dy_3 \tag{5.9}$$

ile verilir.

$S_f$ eyleminin şu simetriyi de sağladığını varsayalım.

$$k_1 y_1 \;\rightarrow\; k_1 y_1 \,+\, \pi \tag{5.10}$$

$$k_2 y_2 \;\rightarrow\; k_2 y_2 \,+\, \pi \tag{5.11}$$

Ayrıca sınır şartlarının $5$ ve $6$'ıncı boyutlar için anti-periyodik, $7$'inci boyut için periyodik olduğunu varsayıyoruz. Bu durumda ($5$ ve $6$'ıncı boyutlar için)

$$\begin{aligned}
& ky \rightarrow ky+\pi \quad \text{için} \\
& i)\ n=4l+1 \Rightarrow \ (\cos\frac{n}{2}ky + \sin\frac{n}{2}ky) \rightarrow (\cos\frac{n}{2}ky - \sin\frac{n}{2}ky) \\
& (\cos\frac{n}{2}ky - \sin\frac{n}{2}ky) \rightarrow -(\cos\frac{n}{2}ky + \sin\frac{n}{2}ky) \\
& ii)\ n=4l+3 \Rightarrow \ (\cos\frac{n}{2}ky + \sin\frac{n}{2}ky) \rightarrow -(\cos\frac{n}{2}ky - \sin\frac{n}{2}ky) \\
& (\cos\frac{n}{2}ky - \sin\frac{n}{2}ky) \rightarrow (\cos\frac{n}{2}ky + \sin\frac{n}{2}ky)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Bu gözlemler ışığında (5.11) ve (5.8 simetrileri eylemin formunun aşağıdaki şekilde olmasını zorunlu kılar

$$S_{fk1} = \int d^4x\ d^3y\ \cos^3 k_2y_2\ \cos k_3y_3 \frac{1}{2}[\mathcal{L}_{fk11} + \mathcal{L}_{fk12}] + H.C. \tag{5.13}$$

$$\mathcal{L}_{fk11} = \frac{i}{4}[(\bar{\chi}_{(1)}\gamma^\mu\,\partial_\mu\chi_{(3)} + \bar{\chi_{(1)}}^P\gamma^\mu\,\partial_\mu\chi^P_{(3)}) + y_1 \rightarrow -y_1] \tag{5.14}$$

$$\mathcal{L}_{fk12} = \frac{i}{4}[(\bar{\chi}\gamma^\mu\,\partial_\mu\chi^P - \bar{\chi}^P\gamma^\mu\,\partial_\mu\chi) + (y_1 \rightarrow -y_1)] \tag{5.15}$$

Burada $P$ üst endeksi (5.11) altında dönüşmüş alanı tanımlamaktadır. Yani

$$\begin{aligned}
\chi &= \sum_{n=0}^{\infty}\{\, f_{|n|}[\cos(\frac{|n|kz}{2}) + \sin(\frac{|n|kz)}{2})] + g_{|n|}[\cos(\frac{|n|kz)}{2}) - \sin(\frac{|n|kz)}{2})]\,\}\chi_{|n|}(x) \\
\chi^P(x,z) &= \sum_{|n|=1}^{\infty}\{\, \pm f_{|n|}[\cos(\frac{|n|kz}{2}) - \sin(\frac{|n|kz)}{2})] \mp g_{|n|}[\cos(\frac{|n|kz)}{2}) + \sin(\frac{|n|kz)}{2})]\,\}\chi_{|n|}(x)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

(5.13) eyleminin (5.16) cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fk1} &= \frac{1}{2}[\mathcal{L}_{fk11} + \mathcal{L}_{fk12}] \\
&= \sum_{n_1,m_1=1}^{\infty} A^{(1,3)}_{n1,m1}\, i\bar{\chi}_{n_1}(x,y)\gamma^\mu\partial_\mu\chi_{m_1}(x,y)\ \cos\frac{n_1+m_1}{2}k_1y_1 + H.C.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
S_{fk1} &= \int d^4x\ d^2y\ \cos^3 k_2y_2\ \cos k_3y_3 \sum_{n_1,m_1=1}^{\infty} A^{(1,3)}_{n1,m1}\, i\bar{\chi}_{n_1}(x,y)\gamma^\mu\partial_\mu\chi_{m_1}(x,y) \\
&\times \int dy_1\ \cos\frac{n_1+m_1}{2}k_1y_1 + H.C. = 0 \\
& A^{(1,3)}_{n1,m1} = (f^*_{n1}g_{m1} + g^*_{n1}f_{m1} + f^*_{n1}f_{m1} - g^*_{n1}g_{m1})
\end{aligned} \tag{5.18}$$

(5.18)'den açıkça görüldüğü gibi, eğer madde eylemi yukarıda verilen şekilde alınırsa, ek boyutlardan daha büyük ölçeklerde hiçbir Kaluza-Klein modu gözlenemez. Daha küçük ölçeklerde ise $\mathcal{L}_f$'in (5.8) altında değişmezliği şartı $n = 4k+1$ modlarının $n = 4k+3$ modlarıyla etkileşmesine neden olur. Diğer bir deyişle daha küçük ölçeklerde farklı Kaluza-Klein modları birbirine karışır ve şu kuralı sağlarlar:

$n_1 = 4l_1+1\,,\ m_1 = 4p_1+3$ veya $n_1 = 4l_1+3\,,\ m_1 = 4p_1+1 l_1, p_1 = 0,1,2,$.......

İlerde göreceğimiz gibi yukarıda verilen teorik çerçeve quantum alan teorisi fermiyon proseslerinin regülarizasyonu için kullanılabilir. Öte yandan bildiğimiz (standart) fermiyonları bu resme dahil etmek için düşük enerjilerde (yani ek boyutlar üzerinden integral aldıktan sonra da) gözlenebilir fermiyonların kalması gerekir. Bu amaçla bir yandan yukarıda verilen teorik çerçeveyi korurken diğer yandan standart model fermiyonlarını da formülasyona dahil etmek gerekir. Bunu için yukarıdaki madde eylemine $k_3y_3 = k_1y_1$ brane'i üzerinde lokalize şu eylemi ekleyelim.

$$S_{fk2} = \epsilon \int d^4x\, d^3y\, \delta(k_3y_3 - k_1y_1) \cos^3 k_2y_2 \cos k_3y_3 \frac{1}{2}[\mathcal{L}_{fk21} + \mathcal{L}_{fk22}] + H.C. \tag{5.19}$$

$$\mathcal{L}_{fk21} = \frac{i}{8}[(\bar{\chi}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi_{(1,3)} + \bar{\chi}^{P1,P2}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P1,P2}_{(1,3)} - \bar{\chi}^{P1}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P1}_{(1,3)} - \bar{\chi}^{P2}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P2}_{(1,3)})$$
$$+ (y_{1,2} \to -y_{1,2})] \tag{5.20}$$

$$\mathcal{L}_{fk22} = \frac{i}{8}[(\bar{\chi}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P1}_{(1,3)} + \bar{\chi}^{P1}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi_{(1,3)} - \bar{\chi}^{P2}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P1,P2}_{(1,3)} - \bar{\chi}^{P1,P2}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P2}_{(1,3)}$$
$$+\bar{\chi}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P2}_{(1,3)} + \bar{\chi}^{P2}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi_{(1,3)} - \bar{\chi}^{P1}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P1,P2}_{(1,3)} - \bar{\chi}^{P1,P2}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P1}_{(1,3)} + \bar{\chi}^{P1}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P2}_{(1,3)}$$
$$+\bar{\chi}^{P2}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P1}_{(1,3)} + \bar{\chi}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi^{P1,P2}_{(1,3)} + \bar{\chi}^{P1,P2}_{(1,3)}\gamma^\mu \partial_\mu \chi_{(1,3)}) + (y_{1,2} \to -y_{1,2})] \tag{5.21}$$

Burada $P1$, $P2$ üst endeksleri, alanın sırasıyla (5.10) ve (5.11) altında dönüşmüş halini belirtmektedir. (5.21) eylemi, (5.10)'yı(yani (5.8)'yı) kırarken, (5.10) ve (5.11) dönüşümlerinin her ikisinin aynı anda uygulanması durumunda değişmez kalır. (5.21)'deki $\epsilon$ (5.10)'nin kırınım miktarını belirleyen bir parametredir. (5.19) ifadesiyle sağlanacak olan regülarizasyonu bozmamak için $\epsilon << 1$ alınacaktır. Alanları Kaluza-Klein modları cinsinden ifade ettikten sonra (5.21) aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned}
S_{fk2} &= \frac{\epsilon L_3}{4\pi} \sum_{n_1,m_1=1}^{\infty} \sum_{n_2,m_2=1}^{\infty} A^{(1,1)}_{n1,m1} A^{(3,3)}_{n2,m2} \int d^4x\, i\bar{\chi}_{n_1,n_2}\gamma^\mu \partial_\mu \chi_{m_1,m_2} \\
&\times \int dy_1[\cos(\frac{n_1+m_1}{2} - 1)k_1y_1 + \cos(\frac{n_1+m_1}{2} + 1)k_1y_1] \\
&\times \int dy_2[3\cos(\frac{n_2+m_2}{2} - 1)k_2y_2 + 3\cos(\frac{n_2+m_2}{2} + 1)k_2y_2 \\
&+ \cos(\frac{n_2+m_2}{2} - 3)k_2y_2 + \cos(\frac{n_2+m_2}{2} + 3)k_2y_2] \qquad (5.22) \\
A^{(1,1)}_{n1,m1} &= (f^*_{n1}g_{m1} + g^*_{n1}f_{m1} + f^*_{n1}f_{m1} - g^*_{n1}g_{m1}) \\
\tilde{A}^{(3,3)}_{n2,m2} &= (f^*_{n2}g_{m2} + g^*_{n2}f_{m2} + f^*_{n2}f_{m2} - g^*_{n2}g_{m2})
\end{aligned}$$

yukarıda (5.22'deki $(1,1)$ üst endeksleri, $n_1 = 4p_1 + 1$ modlarının $m_1 = 4l_1 + 1$ modlarıyla etkileştiğini; $(3,3)$ üst endeksleri, $n_2 = 4p_2 + 3$ modlarının $m_2 = 4l_2 + 3$ modlarıyla etkileştiğini belirtmektedir. Bu durum şu şekilde ifade edilebilir.

$$n_1 = 4p_1 + 1\,,\;\; m_1 = 4l_1 + 1\;,\;\; n_2 = 4p_2 + 3\,,\;\; m_2 = 4l_2 + 3$$
$$\text{veya}\quad n_1 = 4p_1 + 3\,,\;\; m_1 = 4l_1 + 3\;,\;\; n_2 = 4p_2 + 1\,,\;\; m_2 = 4l_2 + 1 \tag{5.23}$$
$$l_1, p_1 = 0, 1, 2, .......$$

Büyük ölçeklerde gözlenen parçacık spektrumu, ek boyutlar üzerinden integral alındıktan sonra kalanlardır ve (5.22)'ı sıfırdan farklı yapan modlara karşılık gelir ve bu nedenle aşağıdaki kurala uyar:

$$
\begin{aligned}
&n_1+m_1-2=(4l_1+1)+(4p_1+1)-2=0 \;\;\Rightarrow\;\; l_1=p_1=0 \;\Rightarrow\;\; n_1=m_2=1\\
&n_2+m_2-6=(4l_2+3)+(4p_2+3)-6=0 \;\Rightarrow\; l_2=p_2=0 \;\Rightarrow\;\; n_2=m_2=3
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

Bu sonucun ışığında (5.22)'daki eylemin ek boyutlar üzerinden integrasyonu şu sonucu verir

$$
S_{fk2} \;=\; \frac{\epsilon L_1 L_2 L_3}{4\pi}(f_1^* g_1+g_1^* f_1+f_1^* f_1-g_1^* g_1)(f_3'^* g_3'+g_3'^* f_3'+f_3'^* f_3'-g_3'^* g_3')\int d^4x\, i\bar{\chi}_{13}\gamma^\mu\partial_\mu\chi_{13}
\tag{5.25}
$$

yukarıda $f_3'$, $g_3'$, $y_2$ yönündeki Fourier açılımlarına karşılık gelirken $f_1$, $g_1$, $y_1$ yönündeki Fourier açılımlarına karşılık gelmektedir. Yukarıdaki sonuçlar şu şekilde özetlenebilir: $S_{fk2}$ eylemi büyük uzunluk ölçeklerinde sadece $\chi_{13}$ modunu verirken küçük ölçeklerde tüm modlar gözlenir ve (5.23)'da verilen kurala uygun şekilde etkileşirler.

$S_{fk1}$ ve $S_{fk2}$'nin toplam katkısını gözönüne aldığımızda dört boyutlu parçacık spektrumu şu şekilde olur: $y_1$ boyutunun büyüklüğünden daha büyük ölçeklerde sadece $S_{fk2}$ katkıda bulunur ve sadece $\chi_{13}$ modu gözlenir. Bu nedenle $\chi_{13}$'i standart model fermiyonları olarak belirliyoruz. Daha küçük ölçeklerde ise $S_{fk1}$ ve $S_{fk2}$ birlikte katkıda bulunur. Bu ölçeklerdeki spektrumu görmek için önce toplam madde Lagrangian'ını belirlemek gerekir. Toplam madde Lagrangian'ı (Ek 3'te açıkça verildiği gibi ) şu şekilde bulunur.

$$
\mathcal{L}_{fk2}^{eff} \;=\; \frac{i}{2}\lim_{x'\to x}\partial_\mu\;(\,\bar{\chi}_{130}(x'),\bar{\chi}_{310}(x')\bar{\chi}_{330}(x')\,)\;\tilde{\mathbf{M}}\,\gamma^\mu\begin{pmatrix}\chi_{130}(x)\\ \chi_{310}(x)\\ \chi_{330}(x)\end{pmatrix}
\tag{5.26}
$$

yukarıda

$$
\tilde{\mathbf{M}} \;=\; \begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{C}}\\ \tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{D}} & 0\\ \tilde{\mathcal{C}} & 0 & 0\end{pmatrix}
\tag{5.27}
$$

şeklindedir. Burada

$$
\tilde{\mathcal{A}} \;\simeq\; \epsilon\cos^3 k_2y_2\sum_{p_1,s_1=0}^{\infty}\tilde{A}^{(1,1)}_{p_1s_1}\,\tilde{T}^{(1,3)}_{p_1,s_1}(y_1)\sum_{p_2,s_2=0}^{\infty}\tilde{A}^{(3,3)}_{p_2s_2}\,\cos\left[2(p_2+s_2)+1\right]k_2y_2
\tag{5.28}
$$

$$
\tilde{\mathcal{B}} \;\simeq\; \cos^3 k_2y_2\sum_{p,s=0}^{\infty}A^{(1)}_{ps}(y_2)\,T_{p,s}(y_1)
\tag{5.29}
$$

$$
\tilde{\mathcal{C}} \;\simeq\; \cos^3 k_2y_2\sum_{p,s=0}^{\infty}A^{(3)}_{ps}(y_2)\,T_{p,s}(y_1)
\tag{5.30}
$$

$$
\tilde{\mathcal{D}} \;\simeq\; \epsilon\cos^3 k_2y_2\sum_{p_1,s_1=0}^{\infty}\tilde{A}^{(3,3)}_{p_1s_1}\,\tilde{T}^{(3,1)}_{p_1,s_1}(y_1)\sum_{p_2,s_2=0}^{\infty}\tilde{A}^{(1,1)}_{p_2s_2}\,\cos\left[2(p_2+s_2)+3\right]k_2y_2
\tag{5.31}
$$

yukarıda

$$\tilde{T}^{(1,3)}_{p_1,s_1}(y_1) \;=\; \frac{\Delta'}{2}\{\frac{\cos{(p_1+s_1+1)(k_1y_1+k_3y_3)}}{p_1+s_1+1}+\frac{\cos{(p_1+s_1)(k_1y_1+k_3y_3)}}{p_1+s_1}\} \quad (5.32)$$

$$\tilde{T}^{(3,1)}_{p_1,s_1}(y_1) \;=\; \frac{\Delta'}{2}\{\frac{\cos{(p_1+s_1+2)(k_1y_1+k_3y_3)}}{p_1+s_1+2}+\frac{\cos{(p_1+s_1+1)(k_1y_1+k_3y_3)}}{p_1+s_1+1}\} \quad (5.33)$$

$$T_{p,s}(y_1) \;=\; \frac{\Delta'}{(p+s)(p+s+1)}[\sin{(p+s)\Delta}\,\cos{(p+s+1)(k_1y_1+k_3y_3)} + \sin{(p+s+1)\Delta}\,\cos{(p+s)(k_1y_1+k_3y_3)}] \quad (5.34)$$

şeklindedir. Buradaki ifadede $\Delta$ ve $\Delta'$, sırasıyla, brane'e dik yönde ve brane yönündeki uzunluk ölçeğini (diğer deyişle ölçüm hasasiyetini) vermektedir ve $\Delta' << 2\pi$ alınmıştır.

$\Delta$ ve $\Delta'$'yü sıfırdan farklı almak koşuluyla $\epsilon$'u yeteri kadar küçük seçerek, her zaman aşağıdaki koşul sağlanabilir.

$$\tilde{\mathcal{A}},\tilde{\mathcal{D}} \,\ll\, \tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{C}} \quad (5.35)$$

Bu nedenle

$$\tilde{\mathbf{M}} \simeq \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{C}} \\ \tilde{\mathcal{B}} & 0 & 0 \\ \tilde{\mathcal{C}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

olur. (5.36)'a karşılık gelen spektrum yaklaşık şu şekilde alınabilir:

$$\psi_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{130}+(\cos\theta\chi_{310}+\sin\theta\chi_{330})] \quad (5.37)$$

$$\psi_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{130}-(\cos\theta\chi_{310}+\sin\theta\chi_{330})] \quad (5.38)$$

$$\cot\theta=\frac{\tilde{\mathcal{B}}}{\tilde{\mathcal{C}}} \quad , \quad B(y)=\frac{1}{4}\sqrt{(\tilde{\mathcal{B}}^2+\tilde{\mathcal{C}}^2)} \quad , \quad y=y_1,y_2 \quad (5.39)$$

Yukarıdaki sonuçlar ek boyutların büyüklüğünden daha küçük ölçeklerde $S_{fk1}$'nin ($S_{fk2}$'ye) baskın olduğunu göstermektedir. Aşağıdaki paragrafta durumun otomatik Pauli-Villars-benzeri bir regülasyona karşılık geldiğini göreceğiz.

Daha önce ek boyutlardan daha büyük ölçeklerde sadece $\chi_{130}$ modu gözlenebileceğini göstermiş ve bunu normal standart model fermiyonlarından jenerik bir tanesi olarak tanımlamıştık. [24] numaralı referansta bu model çerçevesinde ek boyutlu kinetik terimin veya spin-bağlantı teriminin dört boyutlu bir kütle terimine neden olmadıklarını göstermiştik. Bununla birlikte Higgs mekanizması veya başka bir mekanizma yoluyla bir kütle terimi elde etmek olasıdır. Bu nedenle $\chi_{130}$'nin $m$ kütlesine sahip olduğunu varsayalım. Ek boyutlardan daha büyük ölçeklerde $\chi_{130}$'nin propagatörü normal serbest bir fermiyonun propagatörüdür,

$$D(p) \;=\; \frac{i}{\not{p}+m} \quad (5.40)$$

Ek boyutlardan daha küçük ölçeklerde $\chi_{130}$'e karşılık gelen fermiyon propagatörleri hem $\psi_1$, hem $\psi_2$'den katkı alır ve şu şekilde ifade edilebilir.

$$D_{eff}(p) \;=\; D_1(p)\,+\,D_2(p) \sim \frac{1}{B'}[\frac{i}{\not{p}+m_1}-\frac{i}{\not{p}+m_2}] \;=\; \frac{i(m_2-m_1)}{B'(\not{p}+m_1)(\not{p}+m_2)} \quad (5.41)$$

$$B' \;=\; N\,B(y)\cos^3 k_2y_2\cos k_3y_3$$

Yukarıda $\psi_1$, $\psi_2$'in kütleleri, $m_1$, $m_2$'nin Higgs mekanizması, spin-bağlantı vb. yollarla farklı değerler alabileceği varsayılabilir. Yukarıdaki ifade propagatör bazında , $m_1 \neq m_2$ için Pauli-Villars regülarizayonuna [30, 31] $m_1$,=$m_2$ için ise sonlu renormalizasyona (finite renormalization) denktir. Birden fazla iç çizgi (internal line) taşıyan Feynman diagramları için bazı basit durumlarda Pauli-Villars regülarizayonuyla büyük benzerlikler gözlenmekteyse de, en genel durumdaki farklılık-benzerlik düzeyi konusu ayrıntılı ayrı bir çalışma gerektirmektedir.

# 6. Tartışma ve Sonuç

Bu projenin ana konusunu, ek boyutlar çerçevesinde metrik tersleme simetrisinin kuantum alan teorisinin bazı kavramlarını daha iyi anlayabilmemiz yönünde sunduğu bazı olanakları araştırmak şeklinde özetlemek mümkündür. Bu raporda metrik tersleme simetrisinin ve neden olduğu standart olmayan Kaluza-Klein modları spektrumunun bu yönde model oluşturmada önemli bir rol oynadıklarını gösterdik. Kaluza-Klein modlarının metrik tersleme simetrisi yoluyla empoze edilen köşegen-olmayan karışımlarının hem sıfır-nokta enerjileri probleminin çözümünde, hem de Pauli-Villars benzeri bir regülasyonda kilit rol üstlendiklerini gördük [19, 24]. Pauli-Villars benzeri bir regülasyon üretmiş olmamız ve bunu bir simetri yoluyla elde etmemiz yeteri kadar önemli olmakla birlikte bununla sınırlı değildir. Ek boyutlu modellerde kuantum alan regülasyonu kullanmak başlı başına bir sorundur. Ek boyutlu uzaylar, jenerik olarak, kuantum alan teorisine sonsuz Kaluza-Klein modları yoluyla ayrıca regüle edilmesi gereken ek sonsuzluk kaynakları üretirler. Burada oluşturulan Kaluza-Klein spektrumunun standart Kaluza-Klein spektrumundan çok farklı olması ve farklı deneysel sonuçlar öngörmesi de ayrıca önemlidir [23]. Standart formülasyonda ek boyut ölçeğinden daha küçük uzunluk ölçeklerine indiğimizde birinci Kaluza-Klein modu uyarılırken bu modelde bir anda çok sayıda Kaluza-Klein moduyla karşılaşma söz konusudur. Ayrıca metrikteki konformal faktörün ek boyuta kosinüs fonksiyonu şeklinde bağlı olması ve bunun doğrusal olmayan perdeleme etkisi nedeniyle ek boyutlardan daha küçük ölçeklere inildikçe sıfır modun diğer Kaluza-Klein modlarıyla etkileşmesi hızlı bir şekilde artacaktır. Bu da bu modele standart Kaluza-Klein'dan çok farklı ve deneylerde test edlebilir bir özellik vermektedir.

Yukarıda sözünü ettiğimiz ilginç sonuçların yanında araştırılması gereken çok sayıda önemli konu ve nokta da bulunmaktadır. Örneğin sıfır-nokta enerjileri (yani kuantum boşluk enerjisi) düzeyinde elde ettiğimiz sonucu aynen korumakla birlikte madde düzeyinde normal parçacıklarla hayalet benzeri parçacıkları (diğer bir deyişle evrenle bir çeşit ayna evren) arasındaki simetriyi kıran bir teorik çerçeveyi kaba hatlarıyla [19]'te vermiştik. Bu bağlamda bunun veya benzeri bir modelin ayrıntılı sonuçlarını araştırmak ilginç olabilir. Ayrıca bu projede oluşturulan standart olmayan Kaluza-Klein modlarının emprik sonuçlarının ayrıntılı incelenmesi de bu modelin standart Kaluza-Klein yaklaşımıyla karşılaştırılması ve ayrıntılı deneysel öngörüler oluşturulması açısından çok yararlı olacaktır. Araştırılmayı bekleyen en önemli nokta ise bu çerçevede üretilen otomatik, Pauli-Villars benzeri regülasyonun sonuçlarının ayrıntılı bir şekilde incelenmesi ve Pauli-Villars regülasyonu ile ayrıntılı bir şekilde karşılaştırılmasıdır. Gerçekleştirilmeyi bekleyen daha iddialı bir çalışma ise burada verilen basit metriklerin ötesinde, genel oryantasyon değiştiren uzaylarda sıfır-nokta enerjileri ve kuantum alan regülasyonlarının durumunu araştırmak olacaktır.

# A. Ek 1: $S_{\phi\, k}$'nin Hesaplanması

Bu ekte (3.32)'te verilen $S_{\phi\, k}$ ifadesinin açık bir şekilde hesaplanması verilmektedir. (3.31)'i (3.18)'de yerine koyarsak şu ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
S_{\phi k} &= \int dV\, \mathcal{L}_{\phi k} \\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{(-1)^S g}\sqrt{(-1)^{S'} g'}\, d^D x\, d^D x' [\frac{1}{2} g^{AB}\partial_A\phi\partial_B\phi \,+\, \frac{1}{2} g^{A'B'}\partial_{A'}\phi\partial_{B'}\phi] \\
&= \frac{1}{2}\int d^4x\, dy_1 dy_2 dz_1 dz_2\, \Omega_z^3 \Omega_y\, \{\Omega_z^{-1}[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \,-\, (\frac{\partial\phi}{\partial y_1})^2 \,-\, (\frac{\partial\phi}{\partial y_2})^2] \\
&\quad - \Omega_y[(\frac{\partial\phi}{\partial z_1})^2 \,+\, (\frac{\partial\phi}{\partial z_2})^2]\,\} \\
&= \frac{1}{2} L L' \int d^4x \int_0^L \int_0^{L'} dy dz\, \cos^3 k' z \cos ky \{\cos^{-1} k' z [\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \,-\, (\frac{\partial\phi}{\partial y})^2] \,-\, \cos^{-1} ky (\frac{\partial\phi}{\partial z})^2\}
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Bu ifadede $\phi$ yerine (3.29)'teki $\phi_{SS}$ yerleştirip ek boyutlar üzerinden integral alırsak sonucu şu şekilde buluruz.

$$\begin{aligned}
S_{Mk} &= \frac{1}{2} L L' \int d^4x\, \{\eta^{\mu\nu} \sum_{n,m,r,s} \partial_\mu(\,\phi_{n,m}(x)\,)\,\partial_\nu(\,\phi_{r,s}(x)\,) \\
&\quad \times \int_0^L dy\, \cos ky\, \sin(n\, k|y|)\sin(r\, k|y|) \int_0^{L'} dz\, \cos^2 k' z \sin(m\, k'|z|))\, \sin(s\, k'|z|)) \\
&\quad -k^2 \sum_{n,m,r,s} nr\, \phi_{n,m}(x)\, \phi_{r,s}(x) \int_0^L dy\, \cos ky\, \cos(n\, k|y|)\cos(r\, k|y|) \\
&\quad \times \int_0^{L'} dz\, \cos^2 k' z \sin(m\, k'|z|))\, \sin(s\, k'|z|))\} \\
&\quad -k'^2 \sum_{n,m,r,s} ms\, \phi_{n,m}(x)\, \phi_{r,s}(x) \int_0^L dy\, \sin(n\, k|y|)\sin(r\, k|y|) \\
&\quad \times \int_0^{L'} dz\, \cos^3 k' z \cos(m\, k'|z|))\, \cos(s\, k'|z|))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{32}(LL')^2 \int d^4x \, \{\eta^{\mu\nu} \sum_{n,m,r,s} \partial_\mu(\,\phi_{n,m}(x)\,)\,\partial_\nu(\,\phi_{r,s}(x)\,) \\
& \times (\delta_{n,r-1} + \delta_{n,r+1} - \delta_{n,-r-1} - \delta_{n,1-r})(\delta_{m,s-2} + \delta_{m,s+2} - \delta_{m,-s-2} - \delta_{m,2-s} + 2\delta_{m,s} - 2\delta_{m,-s}) \\
& -k^2 \sum_{n,m,r,s} nr\,\phi_{n,m}(x)\,\phi_{r,s}(x)(\delta_{n,r-1} + \delta_{n,r+1} + \delta_{n,-r-1} + \delta_{n,1-r}) \\
& \times (\delta_{m,s-2} + \delta_{m,s+2} - \delta_{m,-s-2} - \delta_{m,2-s} + 2\delta_{m,s} - 2\delta_{m,-s}) \\
& -\frac{1}{2}k'^2 \sum_{n,m,r,s} ms\,\phi_{n,m}(x)\,\phi_{r,s}(x)(\delta_{n,r} - \delta_{n,-r}) \\
& \times (\delta_{m,s-3} + \delta_{m,s+3} + \delta_{m,-s-3} + \delta_{m,3-s} + 3\delta_{m,s-1} + 3\delta_{m,s+1} + 3\delta_{m,-s-1} + 3\delta_{m,1-s})\} \qquad \text{(A.2)} \\
= \quad & \frac{1}{32}(LL')^2 \int d^4x \, \{\eta^{\mu\nu} \sum_{r,s} \\
& \partial_\mu[\,\phi_{r-1,s-2}(x) \,+\, \phi_{r-1,s+2}(x) \,-\, \phi_{r-1,-s-2}(x) \,-\, \phi_{r-1,2-s}(x) \,+\, 2\phi_{r-1,s}(x) \\
& -2\,\phi_{r-1,-s}(x) \,+\, \phi_{r+1,s-2}(x) \,+\, (\,\phi_{r+1,s+2}(x) \,-\, \phi_{r+1,-s-2}(x) \,-\, \phi_{r+1,2-s}(x) \,+\, 2\phi_{r+1,s}(x) \\
& -2\phi_{r+1,-s}(x) \,-\, \phi_{-r-1,s-2}(x)\,) \,-\, \phi_{-r-1,s+2}(x) \,+\, \phi_{-r-1,-s-2}(x) \,+\, \phi_{-r-1,2-s}(x) \\
& -2\phi_{-r-1,s}(x) \,+\, 2\phi_{-r-1,-s}(x) \,-\, \phi_{1-r,s-2}(x) \,-\, \phi_{1-r,s+2}(x) \,+\, \phi_{1-r,-s-2}(x) \\
& +\phi_{1-r,2-s}(x) \,-\, 2\phi_{1-r,s}(x) \,+\, 2\phi_{1-r,-s}(x)\,]\partial_\nu(\,\phi_{r,s}(x)\,) \\
& -k^2 \sum_{r,s} r[\,(r-1)(\,\phi_{r-1,s-2}(x) \,-\, \phi_{1-r,s-2}(x)\,) \,+\, (r-1)(\phi_{r-1,s+2}(x) \,-\, \phi_{1-r,s+2}(x)\,) \\
& -(r-1)(\,\phi_{r-1,-s-2}(x) \,-\, \phi_{1-r,-s-2}(x)\,) \,-\, (r-1)(\,\phi_{r-1,2-s}(x) \,-\, \phi_{1-r,2-s}(x)\,) \\
& +2(r-1)(\,\phi_{r-1,s}(x) \,-\, \phi_{1-r,s}(x)\,) \,-\, 2(r-1)(\,\phi_{r-1,-s}(x) \,-\, \phi_{1-r,-s}(x)\,) \\
& +(r+1)(\,\phi_{r+1,s-2}(x) \,-\, \phi_{-r-1,s-2}(x)\,) \,+\, (r+1)(\,\phi_{r+1,s+2}(x) \,-\, \phi_{-r-1,s+2}(x)\,) \\
& -(r+1)(\,\phi_{r+1,-s-2}(x) \,-\, \phi_{-r-1,-s-2}(x)\,) \,-\, (r+1)(\,\phi_{r+1,2-s}(x) \,-\, \phi_{-r-1,2-s}(x)\,) \\
& +2(r+1)(\,\phi_{r+1,s}(x) \,-\, \phi_{-r-1,s}(x)\,) \,-\, 2(r+1)(\,\phi_{r+1,-s}(x) \,-\, \phi_{-r-1,-s}(x)\,)\,]\phi_{r,s}(x) \\
& -\frac{1}{2}k'^2 \sum_{r,s} s\,[\,(s-3)(\,\phi_{r,s-3}(x) \,-\, \phi_{r,3-s}(x)\,) \,+\, (s+3)(\,\phi_{r,s+3}(x) \,-\, \phi_{r,-s-3}(x)\,) \\
& +3(s-1)(\,\phi_{r,s-1}(x) \,-\, \phi_{r,1-s}(x)\,) \,+\, 3(s+1)(\,\phi_{r,s+1}(x) \,-\, \phi_{r,-s-1}(x)\,) \\
& +(3-s)(\,\phi_{-r,s-3}(x) \,-\, \phi_{-r,3-s}(x)\,) \,+\, (s+3)(\,\phi_{-r,-s-3}(x) \,-\, \phi_{-r,s+3}(x)\,) \\
& +3(1-s)(\,\phi_{-r,s-1}(x) \,-\, \phi_{-r,1-s}(x)\,) \,-\, 3(s+1)(\,\phi_{-r,s+1}(x) \,-\, \phi_{-r,-s-}(x)\,)\,]\,\phi_{r,s}(x)\} \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}
$$

Yukarıda $y = y_2$, $z = z_2$ alınmıştır.

# B. Ek 2: (4.11)'un Hesaplanması

Öncelikle şu dönüşüm kuralına dikkat çekelim:

$$\begin{aligned}
&k\,z \;\to\; \pi \,+\, k\,z \quad \Rightarrow \\
&\quad i) \;\; n = 4l+1 \quad \Rightarrow \quad \left(\cos\frac{n}{2}kz + \sin\frac{n}{2}kz\right) \;\to \left(\cos\frac{n}{2}kz - \sin\frac{n}{2}kz\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \left(\cos\frac{n}{2}kz - \sin\frac{n}{2}kz\right) \;\to - \left(\cos\frac{n}{2}kz + \sin\frac{n}{2}kz\right) \\
&\quad ii) \;\; n = 4l+3 \quad \Rightarrow \quad \left(\cos\frac{n}{2}kz + \sin\frac{n}{2}kz\right) \;\to - \left(\cos\frac{n}{2}kz - \sin\frac{n}{2}kz\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \left(\cos\frac{n}{2}kz - \sin\frac{n}{2}kz\right) \;\to \left(\cos\frac{n}{2}kz + \sin\frac{n}{2}kz\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad l = 0, 1, 2, .....
\end{aligned} \tag{B.1}$$

(4.9)'deki eylemin (ve bu nedenle $i\bar{\chi}\gamma^a\partial_a\chi$ teriminin ) (4.6) altında değişmez kalması koşulu $n = 4l+1$ modlarının $m = 4p+3$ modlarıyla etkileşmelerini zorunlu kılar. Buna ek olarak eylemin $k\,z \to \pi + k\,z$ altında değişmez kalması koşulu Lagrangian'daki terimlerin ek boyutlara bağlılığının şu şekilde olması gerektirir.

$$\begin{aligned}
&\Big\{ \left(\cos\frac{2|r|+1}{2}kz \,+\, \sin\frac{2|r|+1}{2}kz\right)\left(\cos\frac{2|r|+1}{2}kz \,-\, \sin\frac{2|r|+1}{2}kz\right) \\
+\;\; &\left(\cos\frac{2|r|+1}{2}kz \,-\, \sin\frac{2|r|+1}{2}kz\right)\left(\cos\frac{2|s|+1}{2}kz \,+\, \sin\frac{2|s|+1}{2}kz\right)\Big\} \\
&= 2\left[\cos\frac{2|r|+1}{2}kz\,\cos\frac{2|s|+1}{2}kz \,-\, \sin\frac{2|r|+1}{2}kz\,\sin\frac{2|s|+1}{2}kz\right]
\end{aligned} \tag{B.2}$$

burada

$$\begin{aligned}
&2|r|+1 = 4l+1 \;\text{ ve }\; 2|s|+1 = 4p+3 \\
&\text{veya}\;\; 2|r|+1 = 4l+3 \;\text{ ve }\; 2|s|+1 = 4p+1 \\
&l, p = 0, 1, 2, 3, ........
\end{aligned} \tag{B.3}$$

şeklindedir. Bu gözlemlerin ışığında, (4.9)'deki $\mathcal{L}_f$'yi $(\cos k\,z)^{-\frac{1}{2}} i\bar{\chi}\gamma^a\partial_a\chi$ alıp ek boyutlar üzerinden integralini alırsak eylemi şu şekilde buluruz:

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s=0}^{\infty}\int d^4x\, i\bar{\chi}_{(2|r|+1)}\gamma^{\bar{\mu}}\partial_{\bar{\mu}}\chi_{(2|s|+1)} \int dz\,(\cos kz)^2 \\
&\times\Big\{ \left(\cos\frac{2|r|+1}{2}kz \,+\, \sin\frac{2|r|+1}{2}kz\right)\left(\cos\frac{2|r|+1}{2}kz \,-\, \sin\frac{2|r|+1}{2}kz\right) \\
+\;\; &\left(\cos\frac{2|r|+1}{2}kz \,-\, \sin\frac{2|r|+1}{2}kz\right)\left(\cos\frac{2|s|+1}{2}kz \,+\, \sin\frac{2|s|+1}{2}kz\right)\Big\}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Bu ise (4.11)'a denktir.

# C. Ek 3: Toplam Efektif Lagrangian'ın Bulunması

Bu ekte koordinatları $u = k_1y_1 - k_3y_3$, $v = k_1y_1 + k_3y_3$ olan, bir yönü brane yönünde, diğer yönü ona dik olan bir koordinat sisteminde

$$-\Delta \leq \ u \ \leq \Delta \ , \quad v \leq \ v' \ \leq \ v + \Delta' \quad , \quad u = k_1y_1 - k_3y_3 \ , \ \ v = k_1y_1 + k_3y_3 \tag{C.1}$$

ile verilen $\Delta$-$\Delta'$ küçük yüzey parcalarını göz önüne alacağız. Ek boyutlu uzayın ölçeğinden daha küçük ve daha büyük ölçeklerdeki spektrumu karşılaştırmada kullanmak uzere bu $\Delta$-$\Delta'$ parçalarının $u$, $v$ üzerinden integrali alınacaktır.

$\mathcal{L}_{fk1}$ integrali aşağıdaki sonucu verir.

$$\begin{aligned}
& i\sum_r \bar{\chi}_{130}(x)\gamma^\mu\,\partial_\mu\chi_{3r0}(x)\ \cos^3 k_2y_2 \sum_{p,s=0}^{\infty} A_{ps}^{(r)}(y_2) \\
& \times \int_v^{v+\Delta'} dv' \int_{-\Delta}^{\Delta} du \cos\frac{1}{2}[2(p+s)+1](v'+u)\ \cos\frac{1}{2}(v'-u) \\
= \ & \frac{1}{2}\sum_r i\bar{\chi}_{130}(x)\gamma^\mu\,\partial_\mu\chi_{3r0}(x)\ \cos^3 k_2y_2 A_{ps}^{(r)}(y_2) \\
& \times \int_v^{v+\Delta'} dv' \int_{-\Delta}^{\Delta} du\{\cos\left[(p+s)u+(p+s+1)v'\right]+\cos\left[(p+s+1)u+(p+s)v'\right]\} \\
= \ & \sum_r i\bar{\chi}_{130}(x)\gamma^\mu\,\partial_\mu\chi_{3r0}(x)\ \cos^3 k_2y_2 A_{ps}^{(r)}(y_2) \\
& \times \frac{1}{(p+s)(p+s+1)}[\,\sin(p+s)\Delta\ \sin(p+s+1)v'\ |_v^{v+\Delta'} + \sin(p+s+1)\Delta\ \sin(p+s)v'\ |_v^{v+\Delta'}] \\
\simeq \ & \sum_r i\bar{\chi}_{130}(x)\gamma^\mu\,\partial_\mu\chi_{3r0}(x)\ \cos^3 k_2y_2 A_{ps}^{(r)}(y_2) \\
& \times \frac{\Delta'}{(p+s)(p+s+1)}[\,\sin(p+s)\Delta\ \cos(p+s+1)(k_1y_1+k_3y_3) \\
& + \sin(p+s+1)\Delta\ \cos(p+s)(k_1y_1+k_3y_3)]
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Burada

$$
\begin{aligned}
A^{(r)}_{ps} \;=\; & \sum_{p_2=0}^{\infty}\{\, f'_{p,|4p_2+3|}[\cos\,(\frac{|4p_2+3|k_2y_2}{2}) + \sin\,(\frac{|4p_2+3|k_2y_2)}{2})] \\
& + g'_{p,|4p_2+3|}[\cos\,(\frac{|4p_2+3|k_2y_2)}{2}) - \sin\,(\frac{|4p_2+3|k_2z_2)}{2})]\,\}^* \\
& \times \sum_{s_2=0}^{\infty}\{\, f'_{s,|4s_2+r|}[\cos\,(\frac{|4s_2+r|k_2y_2}{2}) + \sin\,(\frac{|4s_2+r|k_2y_2)}{2})] \\
& + g'_{s,|4s_2+r|}[\cos\,(\frac{|4s_2+r|k_2y_2)}{2}) - \sin\,(\frac{|4s_2+r|k_2z_2)}{2})]\,\} \qquad \text{(C.3)}
\end{aligned}
$$

yukarıda $r = 1$ veya $r = 3$; $n_2 = 4l + 1$ veya $n_2 = 4l + 3$, $l = 0, 1, 2, ...$; koşulunu sağlayan $y_2$ yönündeki modları ; ve $f_n$, $g_n$'lerin üzerindeki üssü işaretleri (5.25)'dekilerle aynı anlama sahiptirler ve $f_n$, $g_n$'lerin kendileri değil lineer karşımları olduğunu göstermektedirler. $\mathcal{L}_{fk2}$'nin aynı $\Delta$-$\Delta'$ yüzey parçası üzerinden integrali ise şu şekilde bulunur.

$$
\begin{aligned}
& i\epsilon\,\bar{\chi}_{130}(x)\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\chi_{130}(x)\ \cos^3 k_2y_2 \sum_{p_1,s_1=0}^{\infty}\tilde{A}^{(1,1)}_{p_1s_1}\sum_{p_2,s_2=0}^{\infty}\tilde{A}^{(3,3)}_{p_2s_2} \\
& \times\ \cos\,[2(p_2+s_2)+3]k_2y_2 \int_{v}^{v+\Delta'} dv' \int_{-\Delta}^{\Delta} du \cos\frac{1}{2}[2(p_1+s_1)+1](v'+u)\,\delta(u)\ \cos\frac{1}{2}(v'-u) \\
+\quad & i\epsilon\,\bar{\chi}_{310}(x)\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\chi_{310}(x)\ \cos^3 k_2y_2 \sum_{p_1,s_1=0}^{\infty}\tilde{A}^{(3,3)}_{p_1s_1}\sum_{p_2,s_2=0}^{\infty}\tilde{A}^{(1,1)}_{p_2s_2} \\
& \times\ \cos\,[2(p_2+s_2)+1]k_2y_2 \int_{v}^{v+\Delta'} dv' \int_{-\Delta}^{\Delta} du \cos\frac{1}{2}[2(p_1+s_1)+3](v'+u)\,\delta(u)\ \cos\frac{1}{2}(v'-u) \\
=\quad & i\epsilon\,\bar{\chi}_{130}(x)\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\chi_{130}(x)\ \cos^3 k_2y_2 \sum_{p_1,s_1=0}^{\infty}\tilde{A}^{(1,1)}_{p_1s_1}\sum_{p_2,s_2=0}^{\infty}\tilde{A}^{(3,3)}_{p_2s_2} \\
& \times\ \cos\,[2(p_2+s_2)+3]k_2y_2\,\frac{1}{2}\{\frac{\sin\,(p_1+s_1+1)v'}{p_1+s_1+1}\ |_{v}^{v+\Delta'} + \frac{\sin\,(p_1+s_1)v'}{p_1+s_1}\ |_{v}^{v+\Delta'}\} \\
+\quad & i\epsilon\,\bar{\chi}_{310}(x)\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\chi_{310}(x)\ \cos^3 k_2y_2 \sum_{p_1,s_1=0}^{\infty}\tilde{A}^{(3,3)}_{p_1s_1}\sum_{p_2,s_2=0}^{\infty}\tilde{A}^{(1,1)}_{p_2s_2} \\
& \times\ \cos\,[2(p_2+s_2)+1]k_2y_2\,\frac{1}{2}\{\frac{\sin\,(p_1+s_1+2)v'}{p_1+s_1+2}\ |_{v}^{v+\Delta'} + \frac{\sin\,(p_1+s_1+1)v'}{p_1+s_1+1}\ |_{v}^{v+\Delta'}\} \\
\simeq\quad & i\epsilon\,\bar{\chi}_{130}(x)\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\chi_{130}(x)\ \cos^3 k_2y_2 \sum_{p_1,s_1=0}^{\infty}\tilde{A}^{(1,1)}_{p_1s_1}\sum_{p_2,s_2=0}^{\infty}\tilde{A}^{(3,3)}_{p_2s_2} \\
& \times\ \cos\,[2(p_2+s_2)+3]k_2y_2\,\frac{\Delta'}{2}\{\frac{\cos\,(p_1+s_1+1)(k_1y_1+k_3y_3)}{p_1+s_1+1} + \frac{\cos\,(p_1+s_1)(k_1y_1+k_3y_3)}{p_1+s_1}\} \\
+\quad & i\epsilon\,\bar{\chi}_{310}(x)\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\chi_{310}(x)\ \cos^3 k_2y_2 \sum_{p_1,s_1=0}^{\infty}\tilde{A}^{(3,3)}_{p_1s_1}\sum_{p_2,s_2=0}^{\infty}\tilde{A}^{(1,1)}_{p_2s_2}\ \cos\,[2(p_2+s_2)+1]k_2y_2 \\
& \times\frac{\Delta'}{2}\{\frac{\cos\,(p_1+s_1+2)(k_1y_1+k_3y_3)}{p_1+s_1+2} + \frac{\cos\,(p_1+s_1+1)(k_1y_1+k_3y_3)}{p_1+s_1+1}\} \qquad \text{(C.4)}
\end{aligned}
$$

yukarıda

$$\tilde{A}^{(1,1)}_{p_1 s_1} = (f^{(1)*}_{4p_1+1} g^{(1)}_{4s_1+1} + g^{(1)*}_{4p_1+1} f^{(1)}_{4s_1+1} + f^{(1)*}_{4p_1+1} f^{(1)}_{4s_1+1} - g^{(1)*}_{4p_1+1} g^{(1)}_{4s_1+1}) \qquad \text{(C.5)}$$

$$\tilde{A}^{(3,3)}_{p_2 s_2} = (f^{(3)*}_{4p_2+3} g^{(3)}_{4s_2+3} + g^{(3)*}_{4p_2+1} f^{(3)}_{4s_2+3} + f^{(3)*}_{4p_2+3} f^{(3)}_{4s_2+3} - g^{(3)*}_{4p_2+3} g^{(3)}_{4s_2+3}) \qquad \text{(C.6)}$$

Burada $f_n$ ve $g_n$ler bazı sabitlerdir. Yukarıda bulduğumuz ifadeleri toplarsak toplam efektif Lagrangianı buluruz.

$$\mathcal{L}^{eff}_{fk2} \;=\; \frac{i}{2} \lim_{x' \to x} \partial_\mu \; (\, \bar{\chi}_{130}(x'), \bar{\chi}_{310}(x') \bar{\chi}_{330}(x') \,)\; \tilde{\mathbf{M}}\, \gamma^\mu \begin{pmatrix} \chi_{130}(x) \\ \chi_{310}(x) \\ \chi_{330}(x) \end{pmatrix} \qquad \text{(C.7)}$$

# Kaynakça

[1] Kaluza, T., Zum Unitäts problem in der Physik, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, K41, 966-72 (1921);
Klein, O., Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie, *Z. Phys.*, 37, 895-906 (1926).

[2] Duff, M.J., Kaluza-Klein theory in perspective, in Stockholm 1994, *The Oskar Klein Centenary*, preprint arXiv:hep-th/9410046.

[3] Uehara, Y., A Mini review of constraints on extra dimensions, *Mod. Phys. Lett. A*, 17, 1551-8 (2002).

[4] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., Dvali, G., The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter, *Phys. Lett. B*, 429, 263-72 (1998);
Antoniadis, I., Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., Dvali, G., New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV, *Phys. Lett. B* 436, 257-63 (1998).

[5] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., Dvali, G., Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity, *Phys. Rev. D*, 59, 086004 (1999).

[6] Randall, L., Sundrum, R., A Large mass hierarchy from a small extra dimension, *Phys. Rev. Lett.*, 83, 3370-3 (1999);
Randall, L., Sundrum, R., An Alternative to compactification, *Phys. Rev. Lett.*, 83, 4690-3 (1999).

[7] Kaplan, D.E., Tait, T.M.P., New tools for fermion masses from extra dimensions, *JHEP*, 0111:051(2001)

[8] Erdem, R., Fermion families, and chirality through extra dimensions, *Eur.Phys.J.C*,25, 623-8 (2002)

[9] Flacke, T., Hooper, D., Marc-Russell, J., Improved bounds on universal extra dimensions and consequences for LKP dark matter, *Phys. Rev. D*, 73, 095002 (2006) [Erratum-ibid. 74, 019902 (2006)].

[10] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., Kaloper, N., Sundrum, R., A Small cosmological constant from a large extra dimension, *Phys. Lett. B*, 480, 193-9 (2000)

[11] Erdem, R., A Symmetry for vanishing cosmological constant in an extra dimensional toy model, *Phys. Lett. B*, 621, 11-7 (2005);
Erdem, R., A Symmetry for vanishing cosmological constant: Another realization, *Phys.*

*Lett. B*, 639, 348-53 (2006);
Erdem, R., A Symmetry for vanishing cosmological constant, *J. Phys. A*, 40, 6945-50 (2007).

[12] Tegmark, M. et al (SDSS), Cosmological parameters from SDSS and WMAP, *Phys. Rev. D*, 69, 103501 (2004);
Riess, A.G. et al (Supernova Search Team), Observational evidence from supernovae for an accelerating, universe and a cosmological constant, *Astron. J.*, 116, 1009-38 (1998);
Perlmutter, S. et al (Supernova Cosmology Project), Measurement of omega and lambda from 42 high redshift supernovae, *Astrophys. J.*, 517, 565-86 (1999 );
Astier, P. et al, The supernova legacy survey: measurement of $\omega_m$, $\omega_\Lambda$ and w from the first year data set, *Astron. Astrophys.*, 447, 31-48 (2006)

[13] Weinberg, S., The cosmological constant problem, *Rev. Mod. Phys.*, 61, 1-23 (1989)

[14] Padmanabhan, T., Cosmological constant: The Weight of the vacuum, *Phys.Rept.*,380, 235-320 (2003)

[15] Nobbenhuis, S., Categorizing different approaches to the cosmological constant problem, *Found.Phys.*,36, 613-680 (2006)

[16] Burgess, C.P., Extra Dimensions and the Cosmological Constant Problem, arXiv:0708.0911 (2007)

[17] ’t Hooft, G., Nobbenhuis, S., Invariance under complex transformations, and its relevance to the cosmological constant problem, *Class.Quant.Grav.*, 23, 3819-32 (2006)

[18] Duff, M.J., Kalkkinen, J., Signature reversal invariance, *Nucl. Phys. B*, 758, 161-84 (2006)

[19] Erdem, R., A Way to get rid of cosmological constant and zero point energy problems of quantum fields through metric reversal symmetry, *J. Phys. A*, 41, 235401 (2008)

[20] Maggiore, M., Zero-point quantum fluctuations and the cosmological expansion,arXiv: 1004.1782 (2010);

[21] Bilic, N., Vacuum fluctuations in a supersymmetric model in de Sitter spacetime, arXiv:1004.4984 (2010)

[22] Kaya, A., Cosmological Evolution of Vacuum and Cosmic Acceleration, arXiv:1006.0559 (2010)

[23] Erdem, R., Towards the solution of cosmological constant and zero point energy problems through metric reversal symmetry, *J. Phys. Conf. Ser.*, 174, 012067 (2009);
Erdem, R, Finite number of Kaluza-Klein modes, all with zero masses, *Mod. Phys. Lett. A*, 25, 825-33 (2010)

[24] Erdem, R., Possibility of automatic Pauli-Villars-like regularization through extra dimensions, arXiv:0902.4819

[25] Weinberg, S., The Quantum Theory of Fields, Vol:1, Cambridge Univ. Pres, New York, (1995)

[26] Birrell,N.D., Davies, P.C.W., *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, (1984);
Elizalde, E., Odintsov, S.D., Renormalization group improved effective potential for gauge theories in curved space-time, *Phys. Lett. B*, 303, 240-8 , (1993);
Guberina, B., Horvat, R., Štefančič, H., Renormalization-group running of the cosmological constant and the fate of the universe, *Phys.Rev. D*, 67, 083001, (2003)

[27] de Vega, H.J., Sanchez, N.G., arXiv:astro-ph/0701212.

[28] Linde, A.D., The universe multiplication and the cosmological constant problem, *Phys. Lett. B*, 200, 272-4, (1988);
Linde, A.D., Inflation, quantum cosmology and the anthropic principle, *Science and Ultimate Reality*, ed: Barrowetal, J.D., Cambridge University Pres, Cambridge, (2003). pp 426-58

[29] Kaplan, D.E., Sundrum, R., A Symmetry for the cosmological constant, *JHEP*, 0607 (2006) 042;
Moffat, J.W., Charge, conjugation, invariance of the vacuum and the cosmological constant problem, *Phys. Lett. B*, 627, 9-17 (2005).

[30] Itzykson, C., Zuber, J.-B., *Quantum Field Theory*, Dover Publications, New York, (1980)

[31] Pauli, W., Villars, F., On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory, *Rev. Mod. Phys*, 21, 434-44 (1949)

**TÜBİTAK**
**PROJE ÖZET BİLGİ FORMU**

**Proje No: 107T235**

**Proje Başlığı: Oryantasyon Değiştiren Ek-Boyutlu Uzayların Boşluk Enerji Yoğunluğu ve Kaluza-Klein Modları Üzerindeki Etkileri**

**Proje Yürütücüsü ve Araştırmacılar: Prof.Dr. Recai Erdem**

**Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi: İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Fizik Bölümü, Gülbahçe Köyü Kampüsü, Urla 35430, İzmir**

**Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi: TÜBİTAK, Ankara**

**Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: 01.11.2007 - 30.04.2010**

**Öz (en çok 70 kelime)**

**Daha önce benim ve başka araştırmalacıların klasik düzeyde irdeledikleri oryantasyon değiştiren bazı uzaylar ve ilgili simetri kuantum düzeyinde çalışıldı. İlk aşamada, bu teorik çerçevenin Kaluza-Klein modları yoluyla sıfır-nokta enerjileri problemine çözüm getirdiği gösterildi. Sonra bu çeşit uzayların Kaluza-Klein modları için ilginç sonuçlar doğurduğu gösterildi. Son olarak bu tip uzaylarda quantum alan teorilerindeki sonsuzlukların beklenin tersine daha da kötüleştirmek yerine aksine, otomatik bir Pauli-Villars regülürizasyonuna denk gelir şekilde, giderilebileceği gösterildi.**

**Anahtar Kelimeler: Ek boyutlar, sıfır nokta enerjisi, Kaluza-Klein modları**

**Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu mu? Evet ☐ Gerekli Değil ☒**

Fikri Ürün Bildirim Formu'nun tesliminden sonra 3 ay içerisinde patent başvurusu yapılmalıdır.

**Projeden Yapılan Yayınlar:**

**1- R. Erdem, " A Way to get rid of cosmological constant and zero point energy problems of quantum fields through metric reversal symmetry", Journal of Physics A 41 (2008) 235401**

**2-R. Erdem, " Finite number of Kaluza-Klein modes, all with zero masses", Modern Physics Letters A 25 (2010) 825**

**3- R. Erdem, "Possibility of automatic Pauli-Villars-like regularization through extra dimensions", arXiv:0902.4819**

**4- R. Erdem, " Towards the solution of cosmological constant and zero point energy problems through metric reversal symmetry", Journal of Physics Conference Series 174 (2009) 012067**