# Noether Olmayan Halkalar Üzerinde Krull Schmidt Özellikleri

**Program Kodu:** 3501

**Proje No:** 113F235

Proje Yürütücüsü:

**Doç. Dr. Başak Ay Saylam**

Danışman:

Prof. Dr. Lee Klingler

KASIM 2017

İZMİR

## PROJE ÖZETİ

Modül teorideki en popüler sorulardan biri, bir modulün hangi durumlarda parçalanamaz modüllerin direkt toplamı olarak tek bir şekilde, eş yapılıları saymazsak, ifade edilebileceğidir. Bu probleme *Krull-Schmidt problemi* diyoruz. Projemizde, sonlu karakter bölgeleri ve neredeyse yerel-bütünsel halkalar halkalar üzerinde sonlu ideal direkt toplamlarla ilgilendik.

Projemiz, Goeters ve Olberding'in bu konudaki bazı makalelerinin genelleştirilmesini baz almaktadır. Yazarlar, [17]'de, h-yerel bölgeler üzerinde, *handiyse, yerel* ve *kararlı* olarak adlandırdığımız zayıf izomorfizmalar aralarındaki ilişkileri incelemiş, [18]'de ise, [17]'da elde edilen sonuçları, bu bölgeler üzerinde, bazı Krull-Schmidt problemini incelemek için kullanmışlardır.

Biz, ilk olarak, [17]'yı sonlu karakter bölgeleri için genelleştirmeye çalıştık. İlk amacımız, Rush'ın [26]'te, Krull boyutu bir olan Macaulay halkaları için geliştirmiş olduğu bir *yama* argümanını, sonlu karakter bölgeleri için genelleştirmekti. Böylece anahtar sonuçlardan bir tanesini bu bölgeler üzerinde ispat edebilecektik. Bunu başardık, ancak bunun yeterli olmadığını gördük. Dolayısıyla, önerimizde de bahsettiğimiz B planını uyguladık: [9]'de bulunan Teorem 3'ü kullanarak, sonlu karakter bölgeleri için ispatlamaya çalıştığımız anahtar sonucu elde ettik. Bununla birlikte, [17]'yi bu bölgeler için genelleştirebildik. Bu genelleştirme bize bu bölgeler üzerinde Krull-Schmidt problemine dair kısmi sonuçlar elde etmemizi sağladı.

Sonlu karakter bölgeleri neredeyse yerel-bütünseldir. Böylece, neredeyse yerel-bütünsel halkaları incelemeye yönelik çalımalar yaptık. Amacımız, bu halkalar üzerinde zayıf izomorfizmaların denklik durumlarını incelemekti. Bu halkaları anlamak için [8]'i ve [9] 'u analiz ettik. Aslında, [9]'daki Teorem 3 aslında bu yeni halkalar için ortaya çıkan bir sonuçtur. Ancak, henüz neredeyse yerel-bütünsel halkalar için bahsi geçen sayıf izomorfizmaların denklikleri için yeterli sonuç çıkaramadık.

Özetle, ilk amacımızda A planımızın işe yaramaması ve B planını denemek durumundan kaldığımızdan dolayı, proje süresinin çoğunu ilk amacımız için kullandık. Aslında, bu da ilk amacımızla ilgili derin ve orjinal sonuçları elde

etmemizi sağladı. TÜBİTAK’ın desteklediği bu proje çalışmasının çıktıları, şimdilik iki tane yüksek lisans tezi ve bir tane SCI düzeyindeki bir dergiye (Journal of Pure and Applied Algebra) gönderilen bir makale olup, tamamlanamayan bölüm bir doktora tezini besleyecek niteliktedir.

## ABSTRACT

In module theory, one of the popular questions is that under what conditions a module could be represented as a direct sum of indecomposable modules up to isomorphism, uniquely. Here, we will call this problem as *the Krull-Schmidt problem,* and we are interested only in finite direct sums. In our project, we have dealt with finite direct sums of ideals over domains of finte character and almost local-global rings.

Our project bases on some papers, which is written by Goeters and Olberding, related to this topic. In [17], the authors examine the relationship among *near, local,* and *stable* isomorphisms, which we call the weak isomorphisms, over h-local domains. In [18], they use the results from [17] to compare some Krull-Schmidt properties over these domains.

First, we tried to generalize [17] for domains of finite character. Our first aim is to generalize a *patching* argument for Macaulay rings of Krull dimension one, which has been developed by Rush in [26], for domains of finite character. So, it will be possible to prove one of the key lemmas for this type of domains. We succeded, but we saw that this is not enough. So, we applied Plan B, which appeared in our project proposal: We used Theorem 3 in [9] to prove this key result for domains of finite character. With this, we were able to generalize [17] for domains of finite character. This generalization has given us partial results on the Krull-Schmidt problem over domains of finite character.

Domains of finite character are almost local-global. So, we studied almost local-global rings. Our aim was to compare weak isomorphisms over almost local-global rings. To understad these rings we analyzed [8] and [9]. Indeed, Theorem 3 in [9] is true for these new rings. But, we have not, yet, enough results to compare weak isomorphisms over almost local-global rings.

In summary, since our plan A did not work out well and we had to try plan B, we had to spend most of the project time for our fits purpose. In deed, this has helped us to get deep and original results about our first aim. The outcome of this

project, which is supported by TUBITAK, so far, is two MSc theses and a research paper which has been sent to an SCI journal (Journal of Pure and Applied Algebra), and the quality of the incomplete part is able to feed a PhD thesis.

# 1. GİRİŞ

## 1.1 Tanımlar ve Notasyon:

- $R$ bir tamlık bölgesi, $Q$ onun kesirler cismi olsun ve $G$ burulmasız bir $R$-modülü olsun. $G$'nin ***bölünür bürümü*** $QG$, $Q \otimes G$ olur. $G$'nin ***rank***ı bir $Q$-vektör uzayı olan $QG$'nin boyutudur. Bir $R$ −modül $G$ için, $n > 0$ olmak üzere, $G^{(n)} = G \oplus G \ldots \oplus G$ dış dolaysız toplamdır.
- $G$ ve $H$ iki tane $R$-modülü olsun.

  - ♦ Burulmasız $R$-modülü olan $G$ ve $H$ ***handiyse izomorfik***tir eğer $G$ ve $H$ aynı ranka sahipse ve her sıfırdan farklı $R$-ideali $I$ için öyle bir gömme homomorfizması $f: G \to H$ varsa ki $Ann_R\left(\frac{H}{f(G)}\right) + I = R$ ise.

  - ♦ $G$ ve $H$ ***kararlı izomorfik***tir eğer öyle bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır ki $G \oplus R^{(n)} = H \oplus H^{(n)}$ ise.

  - ♦ $G$ ve $H$ ***yerel izomorfik***tir eğer her azami $R$-ideali $M$ için $G_M \cong H_M$ ise.

- ***Nakayama Önsavı:*** $R$ değişmeli bir halka, $M$ sonlu üretilmiş bir $R$-modülü ve $I$ bir $R$-ideali olsun öyle ki $I \subseteq Jac\,(R)$. Bu durumda, $IM = M \Rightarrow M = 0$'dır.
- R değişmeli bir halka, $I(R)$ tersinebilir ideallerin oluşturduğu grup ve $P(R)$ tek üreteçli ideallerin oluşturduğu grup olsun. $\boldsymbol{Pic(R) = I(R)/P(R)}$**'dır.**
- Bir tamlık bölgesi için her sıfırdan farklı eleman sadece sonlu sayıda azami ideal tarafından içeriliyorsa, bu bölgeye ***sonlu karakter bölgesi***; buna ek olarak, eğer her sıfırdan farklı asal ideal sadece bir azami ideal tarafından içeriliyorsa, bu tamlık bölgesine ***h-yerel bölge*** denir.
- Eğer bir tamlık bölgesi $R$'nin her sonlu üretilmiş idealinin tek üreteci varsa, $R$'ye ***Bezout bölgesi*** diyoruz.

- $R$ değişmeli bir halka olsun ve $f \in R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ herhangi bir polinom olsun. $R$'ye ***yerel-bütünsel halka*** diyoruz eğer ki $f$'nin, her azami $R$-ideali $M$ için, $R_M$ üzerinde, bir değeri birim ise $f$, $R$ üzerinde de bir birim değer alır. Eğer bir halkanın her öz faktör halkası yerel-bütünsel ise, o halkaya ***neredeyse yerel-bütünsel halka*** diyoruz. Her sonlu karakter halkası yerel-bütünsel halkadır.

- *R* bir tamlık bölgesi, *M* de onun bir azami ideali olsun. Eğer *M* 'nin içermediği her *R*-ideali tersinebilir ise, *M*'ye ***tümleyen*** denir.

**1.2 Konu ve Amaçlar**

*R* değişmeli bir halka, *C* de *R* üzerinde tanımlanmış belli bir özelliği sağlayan modüllerden oluşan bir sınıf olsun. *C* sınıfının parçalanamaz (veya ayrışamaz) elemanlarının oluşturduğu sonlu direkt toplam sadece tek bir şekilde, eş yapılıları saymazsak, ifade edilebiliyorsa *C*, *Krull-Schmidt özelliğini (KSÖ)* sağlar. *k* sabit bir pozitif sayı olmak üzere, eğer bu sonlu direkt toplam parçalanamaz modüllerin *k*'nıncı üsleri tarafından oluşuyorsa, *C zayıf Krull-Schimdt özelliğini (ZKSÖ)* sağlar. (Burada, bir modülün *k*'nıncı üssü, o modülün *k* tane kopyası anlamına gelmektedir.)

*R* bir sonlu karakter bölgesi olsun. Projemizdeki temel amacımız *R* üzerinde belli paçalanamaz burulmasız modüllerden oluşan sınıflar için Krull-Schmidt özelliklerini incelemek. Bu sınıflar asağıdaki gibidir:

- Parçalanamaz *burulmasız* modüllerin oluşturduğu sınıf: Burulmalı bir modül, sonlu üretilmiş serbest bir $\mathrm{R}$ -modülünün alt modülüne izomorftur.
- (Parçalanamaz) ideallerin oluşturduğu sınıf.
- (Parçalanamaz) rankı bir olan modüllerin oluşturduğu sınıf: Parçalanamaz rankı bir olan bir modül, $R$'nin kesirlerinin tüm halkasının bir altmodülüne izomorftur.

Yukarıdaki sınıflardan her birinin KSÖ (veya ZKSÖ)'yü sağlaması durumunda, $R$ *o sınıf için KSÖ* (veya *ZKSÖ*)'yü sağlıyor denir.

KSÖ, hemen hemen bütün değişmeli halkalar üzerinde sağlanamaz. Genel olarak, sadeleştirme ve ilgili konular, modüllerin sonlu üretilmiş olması hipotezi altında çalışılır. Bunun sebebi, cebirsel ispatlarda çok önemli bir araç olan *Nakayama önsav*ını kullanabilmektir. Ama bazen bu araç yeterli olmayabilir. Değişmeli bir Noether halkası üzerinde tanımlanan sonlu üretilmiş modüller KSÖ'yü sağlamayabilir. Örneğin, $R$ temel ideal bölgesi olmayan bir Dedekind bölgesi ise, R'deki $I$ ve $J$ idealleri için $I + J \cong R + IJ$, böylece $R$, idealler için KSÖ'yü sağlamaz.

Projemizde başarıyla tamamladığımız amaçlarımız sırasıyla aşağıdaki gibidir:

- **Amaç 1:** Bir sonlu karakter bölge üzerinde tanımlanan bir izdüşel modülün, ne zaman serbest bir eklenene sahip olduğunu araştırmak,
- **Amaç 2:** Bir sonlu karakter bölge üzerinde tanımlanan burkulmasız modüller için zayıf izomorfizmaların denklik durumlarını incelemek ve, handiyse eş yapılıları saymazsak, modüllerin sadeleştirilmesini calışmak,
- **Amaç 3:** Sonlu karakter bir halkada idealler ve parçalanamaz modüller için Krull-Schmidt ile zayıf Krull-Schmidt özelliklerini incelemek.

İlk iki amacımızın ortaya çıkmasının sebebi, [17]'yi sonlu karakter bölgeleri için genelleştirmekti. Biz, ilk amacımız doğrultusunda, Rush'ın [26]'da, Krull boyutu bir olan Macaulay halkaları için geliştirmiş olduğu bir *yama* argümanını, sonlu karakter bölgelerine adapte etmeye çalıştık. Böylece anahtar sonuçlardan bir tanesini bu bölgeler üzerinde ispat edebilecektik. Bunu başardık, ancak bunun yeterli olmadığını gördük.

Bir sonlu karakter bölgesi, neredeyse yerel-bütünsel bir bölgedir. Ayrıca, [9]'da, Brewer ve Klingler, neredeyse yerel-bütünsel olan bir bölgenin *Birim İçerik Eklenen (BİE) Özelliği'*ne sahip olduğunu göstermişlerdir. Bu özelliği kısaca açıklayalım. $R$ bir halka olsun ve $R$'nin $n$ tane kopyasının oluşturduğu modüle $G$ diyelim. $x \in G$ olsun. $x$'in koordinatlarının ürettiği ideale, $x$'in *içeriği* diyoruz. $H$, $G$'nin bir alt modülü olmak üzere, $H$'nin her elemanının içeriklerinin ürettiği ideale, $H$'nin *içerik ideali* diyoruz. Eğer $G$'nin sonlu üretilmiş herhangi bir alt modülünün içerik ideali bir birimse ve bu alt modül, $G$'nin rankı bir olan bir izdüşel ekleneni içeriyorsa, $R$, BİE özelliğine sahiptir. Bu özelliği kullanarak, birinci amacımıza ulaştık. Ancak, şunu belirtelim ki, önerimizde belirttiğimiz yaklaşım yeterli olmadığı için B planına geçmiş olduk ve, dolayısıyla, bu amaca ulaşmamız beklediğimiz süreden daha uzun sürdü.

[17]'de yazarlar, h-yerel bölgeler üzerinde tanımlanan modüller için handiyse, kararlı ve yerel izomorfizmalar arasındaki ilişkiyi çalışmışlardır. Genellikle, bu zayıf izomorfizmalar birbirlerine denk değillerdir. Bu zayıf izomorfizmların, ne zaman birbirlerine denk olacakları veya bir zayıf izomorfizmanın ne zaman izomorfizma olacağı araştırılabilir.

Noether olmayan halkalar için sonlu üretilmiş modüller ile burulmasız modüller arasındaki fark önemlidir. Bundan dolayı, burulmasız modüller çalışılırken, Nakayama önsavı kullanılamaz. [17]'da, modüllerin sonlu üretilmiş olması, zayıf izomorfizma formlarını karşılaştırılarak, baypas edilmiştir. Bu zayıf izomorfizmalar, grup teoriden adapte edilmiştir. Örneğin, değişmeli grup teoriciler, burulmasız rankı sonlu olan değişmeli gruplarındaki bir çok sadeleştirme ve ayrıştırma ile ilgili sonucu, handiyse izomorfizmalarını saymazsak, ispat etmişlerdir. Ayrıca, [6]'da, sonlu sayıda azami ideale sahip, indirgenmiş bir değişmeli Noether halkası üzerinde tanımlanan tamamen ayrışılabilir sonlu üretilmiş modüller için izomorfizmanın yerel izomorfizmaya denk olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla, bu zayıf izomorfizmalar hakkında edinilen tecrübeler doğrultusunda, sonlu karakter bölgeleri için bu izomorfizmaları karşılaştırabildik ve de bu karşılaştırmaları [17]'de bulunan sonuçları genelleştirmede kullanabildik ve ikinci amacımıza ulaştık.

[18]'de, P. Goeters ve B. Olberding, modüller sonlu üretilmiş olmaksızın, h-yerel bölgeler üzerinde çalışmışlardır. Bu, Krull-Schmidt özelliği bağlamında çok doğaldır, çünkü bir Noether halkasında, idealler için zayıf Krull-Schmidt özelliği o halkanın h-yerel olmasına anlamına gelir. Bu makalede yazarlar, Krull-Schmidt özelliğinin ağağıdaki versiyonlar için incelemişlerdir:

- Tamlık bölgeleri üzerinde ideallerin direkt toplamları,
- Parçalanamaz burulmasız modüllerin direkt toplamları,
- Rankı bir olan burulmasız modüllerin direkt toplamaları.

[18]'deki ana sonuçlar, h-yerel bölgeler için formülize edilmişlerdir. Bu da, Noether ve Prüfer bölgeleri üzerinde tanımlanan modüller için Krull-Schmidt özellikleriyle ilgili yeni sonuçlara yol açmıştır. Bu makaledeki bir çok sonuç, [16]'da zayıf izomorfizmalar arasında kurulan ilişkiyi kullanmaktadır.

İlk iki amacımızı gerçekleştiririken edindiğimiz bilgiler doğrultusunda, üçüncü amacımıza dair kısmi sonuçlar elde ettik. [18]'yi birlikte analiz etmiş olduğumuz yüksek lisans öğrencimiz doktora çalışmalarına devam edecektir. Bu kısmi sonuçların, bu doktora tezinde tamamlanması planlanmaktadır.

## 1.3 Literatür Özeti

Karmaşık bir yapıyı anlamak için onu oluşturan yapıtaşlarına bakılmalıdır. Bir yapının ne zaman ayrışamaz yapıtaşlarına parçalanabileceğini incelemek, bundan dolayı önemlidir. Örneğin, *aritmetiğin temel teoremi*, bu amaç doğrultusunda ortaya çıkmıştır. Bu teorem, matematikte kullanıldığı gibi başka alanlarda da, örneğin *bilgi güvenliği* ve *kriptografi*de, sıklıkla kullanılır. Modül teoride ise, bu temel teoremin bir versiyonu olan ***Krull-Schmidt-Azumaya-Remak Teoremi***'nin, önemli bir yeri vardır. Bir modülün parçalanamaz bazı modüllerin direkt toplamı olarak sadece tek bir şekilde, eş yapılıları saymazsak, hangi durumlarda yazılabileceğini araştıran pek çok yayın vardır. Projemizde, ***Krull-Schmidt problemi*** olarak adlandırdığımız bu problemin, uzun ve seçkin bir tarihi vardır.

Krull-Schmidt problemi, Wedderburn [30], Remak [25], Schmidt [27], Krull [20] ve Azumaya [3]'ün fikirlerinin zirvesinde bulunmaktadır. W. Krull ve O. Yu. Schmidt, Krull-Schmidt problemini ilk olarak, sonlu gruplar için kurgulamışlardır. Daha sonra, Azumaya bu özelliği modül teoriye adapte etmiştir. Buna ek olarak, 1956'da Atiyah bu problemi *balya*larda, 1962'de Gabriel ise *soyut kategoriler*de yapılandırmıştır. Krull-Schmidt probleminin popüleritesinin en önemli sebebi, bu özelliğin her değişmeli halka için geçerli olmadığındandır. 2. Bölümdeki, Dedekind bölgesi üzerinde yapılan açıklama, bu duruma bir örnektir. Ayrıca, örneğin, değişmeli bir halka olan $R$ üzerinde tanımlı $A, B$ ve $C$ modülleri için $A + B \cong B + C$ ise, ancak özel koşullar altında $A \cong C$ olduğunu söyleyebiliriz. Başka bir deyişle, bu zayıf sadeleştirme özelliği bile her durum için sağlanamaz.

Yukarıda bahsettiğimiz ***Krull-Schmidt-Azumaya-Remak Teorem***'i şunu der: Yerel *endomorfizma* halkalarına sahip olan sayılabilir sayıdaki parçalanamaz modüllerin direkt toplamı sadece tek bir şekilde, eşyapılıları saymazsak, yazılabilir. Başka bir deyişle, bu parçalanamaz modüllerin oluşturduğu sınıf, Krull-Schmidt özelliğini sağlar. Bu teoremin, ne zaman geçerli olduğunu araştıran bir çok çalışma yapılmıştır. Örneğin, [21]'de Krull, bir halka üzerinde her parçalanamaz modül, sağ Artin modülü olduğunda, ne zaman bu teoremin sağlanacağını incelemiştir. 1969'ta Warfield, bunun halka sağ Noether veya değişmeli olduğunda mümkün olduğunu ispatlamıştır [28]. 1975 yılında Warfield, Krull'un sorusuna benzer bir soru ortaya koymuştur [29]: Sıralı bir halka üzerinde tanımlanan sonlu temsil edilmiş bir modül, ne zaman tek sıralı modüllerin direkt toplamıdır ve bu direkt toplam ne zaman tektir? Başka bir deyişle, Warfield, Krull-Schmidt özelliğinin herhangi bir versiyonunun sıralı modüller için sağlanıp sağlanmayacağını sormuştur. Günümüzün bu alandaki önemli matematikçilerinden olan A. Facchini, 1996 yılında, bu sorunun yanıtının negatif olduğunu göstermiştir [12]. A. Facchini, özellikle, hangi durumlarda Krull-Schmidt özelliğinin sağlanamayacağıyla ilginmiştir. Ayrıca, Krull-Schmidt özellikleri hakkında, R. Wiegand ve L. Klingler ile ortaklaşa çalışmaları mevcuttur. Bu da, bu konunun cebir alanında, Avrupa ve Amerika arasında bir köprü oluşturduğunu gösterir. Projemiz süresince elde etmiş olduğumuz çıktılar, yeni popülerleşmiş olan Noether olmayan halkalar hakkında yeni bilgilere ışık tutmaktadır.

L. Levy ve C. Odenthal, Krull-Schmidt özelliğini, Krull boyutu bir olan değişmeli Noether halkaları üzerinde, sonlu-modül cebirlerin sonlu üretilmiş yarı asal modülleri için analiz etmişlerdir [22], [23]. Özellikle, bu şekildeki bir cebirin ne zaman burulmasız modüller için Krull-Schmidt özelliğini sağlayacaklarını, karakterize etmişlerdir. Bu çalışmadan ilham alan B. Olberding ve P. Goeters, [17] ve [18]'de herhangi bir tamlık bölge üzerinde, idealler ve modüller için Krull-Schmidt özelliklerini incelemişlerdir. [16]'daki şema, [22] ve [23]'ten farklı biraz farklıdır. Olberding ve Goeters, Krull boyutu bir olma gerekliliğini ortadan kaldırarak, Noether tamlık bölgeleri üzerinde bir takım sonuçlar ortaya koymuşlardır. Bu farklılığa rağmen, Krull boyutun bir olduğu durumda elde edilen sonuçlar ile arasında benzerlikler vardır. Aslında, [16]'da, idealler için Krull-Schmidt özelliğini sağlayan ve Krull boyutu bir olan Noether tamlık bölgeleri, burulmalı modüller için aynı özelliği sağladığı gösterilmiştir.

Proje yürütücüsü, dokotora tezinde, [16]'dan esinlenerek, *sonlu bölen*leri olan Noether halkaları üzerinde, ayrışamaz ideallerin sonlu direkt toplamlarını ile rankı bir olan ayrışamaz modüllerin sonlu direkt toplamları için Krull-Schmidt özelliğini incelemiştir [4]. L. Klingler ile birlikte, ayrışamaz ideallerin sonlu direkt toplamları için bu özelliği sağlayan *indirgenmiş* değişmeli Noether halkalarını karakterize etmişlerdir [7]. Bu makale, yürütücünün doktara tezi için bir temel oluşturmuştur. Tezinin geri kalan kısmında, indirgenmiş değişmeli bir Noether halkasının üzerinde, rankı bir olan modüller için de Krull-Schmidt özelliğini incelemiştir [4], [5]. Buna ek olarak, eğer bu halkanın Krull boyutu bir ise, bu özelliğin, idealler için ve rankı bir olan modüller için çakıştığını göstermiştir [4], [5].

Noether durumuyla ilgilendikten sonra, Noether olmayan halkalar üzerinde Krull-Schmidt özellikleri için neler söylenebileceğini araştırmak doğaldır. [18]'de Goeters ve Olberding, Noether varsayımlar ortadan kaldırıldığında, Krull-Schmidt özelliklerinin nasıl şekilleneceğini açıklamaya yönelik bir yaklaşım aramışlardır. Bu makalede, Noether olmayan bir halka sınıfı olan h-yerel tamlık bölgeleri ele alınmıştır. [17]'de, yazarlar, h-yerel bölgeler üzerindeki burulmasız modüller için handiyse, kararlı ve yerel izomorfizmalar arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Genellikle, bu zayıf izomorfizmalar birbirlerine denk değildirler. Bu izomorfizmaların hangi durumlarda birbirlerine denk oldukları veya bir zayıf izomorfizmanın ne zaman izomorfizmaya denk olacağı çalışılabilinecek konular arasındadır. Bilindiği gibi, Noether halkalar üzerinde, burulmalı modüller, tam olarak, sonlu üretilmiş ve sıfırdan farklı olmak üzere, hiç bir sıfır böleni tarafından sıfırlanmayan modüllerle örtüşür. Ancak, Noether olmayan halkalar için sonlu üretilmiş modüller ile burulmasız modüller arasındaki fark oldukça belirgindir. Bundan dolayıdır ki, burulmasız modüllerin sadeleştirmesini incelerken Nakayama önsavı kullanılamaz. [17]'de, zayıf izomorfizma formlarının çalışılmasında ve karşılaştırılmasında, sonlu üretilmişlik, baypas edilmiştir. Bu zayıf izomorfizmalar, modül teorisine değişmeli grup teorisinden adapte edilmiştir. Örneğin, değişmeli grup teoriciler, handiyse izomorfizmasının yardımıyla, burulmasız ve rankı sonlu olan değişmeli gruplarda, bir çok sadeleştirme ve ayrıştırma sonuçlarını, handiyse eşyapılıları saymazsak, genelleştirmişlerdir. Ayrıca, [5]'te, indirgenmiş değişmeli Noether bir halkanın en az bir tane olacak şekilde sonlu sayıda *tek üreteçli* azami ideal varsa, tamamen ayrışabilir sonlu üretilmiş modüller için izomorfizma yerel izomorfizmaya, o da handiyse izomorfizmaya denktir.

## 2. GEREÇ VE YÖNTEM

### 2.1 Amaç 1'i tamamlamak için elimizdeki gereçler ve uygulanan yöntemler

Projemizin ilk amacı:

"Bir sonlu karakter bölge üzerinde tanımlanan bir izdüşel modülün, ne zaman serbest bir eklenene sahip olduğunu araştırmak,"

idi. Bu doğrultuda, öncelikle, Rush'ın [26]'da, Krull boyutu bir olan Macaulay halkaları için geliştirmiş olduğu bir *yama* argümanını, sonlu karakter bölgelerine adapte etmeye çalıştık. Bunu başardık, ancak bunun yeterli olmadığını gördük. Bunun sebebi ise halkamız üzerinde ek bir varsayıma ihtiyacımızın olmasıydı. Bu ek varsayım, *G* bir burulmasız *R*-modülü olmak üzere,

$$(*) Hom_R(G,R) \otimes R \to R$$

homomorfizmasının örten olmasının gerekmesiydi.

Ancak, ileriki çalışmalarımızda gördük ki, aslında bu ek varsayıma gerek yoktu. Bunu da, her neredeyse yerel-bütünsel bir bölgenin *Birim İçerik Eklenen (BİE) Özelliği'*ne sahip olmasının [9, Teorem 3] yardımıyla anladık. Çünkü her sonlu karakter bölgesi neredeyse yerel-bütünseldir. Yani, $G$'nin her sonlu üretilmiş içerik ideali birim olan her alt modülü, $G$'nin rankı bir olan bir izdüşel ekleneni içeriyordur. Bu özelliği kullanarak, sonlu karakter bölgeleri üzerinde, her sonlu üretilmiş sonlu rankı olan izdüşel modülün, sonlu ranklı bir serbest modül ile tersinebilir bir idealin dik toplamına izomorf olduğunu gösterdik.

### 2.2 Amaç 2'yi tamamlamak için elimizdeki gereçler ve uygulanan yöntemler

Projemizin ikinci amacı:

" Bir sonlu karakter bölge üzerinde tanımlanan burkulmasız modüller için zayıf izomorfizmaların denklik durumlarını incelemek ve, handiyse eş yapılıları saymazsak, modüllerin sadeleştirilmesini calışmak. "

idi. Yani, sonlu karakter halkası üzerinde,yerel, kararlı ve handiyse izomorfizmlarının karşılaştırmaktı. Birinci amacımızı gerçekleştirmekle birlikte, önemli bir gereç elde etmiştik. Bunun yanında, bu karşılaştırmaları gerçekleştirmek için gerekli bir geçiş aracına ihtiyaç duyduk. Bu geçiş aracı için gerekli olan bulgular çoğunlukla şu gerece dayanıyordu:

"Gereç 1: *R* bir sonlu karakter bölgesi ve F sonlu üretilmiş sonlu rankı olan serbest bir *R*-modülü olsun. *G* ve *H F'*nin alt *R*-modülleri olmak üzere, *F* üzerinde bir otomorfizma tanımlayabiliriz öyle ki bu otomorfizma *G* 'den *H* 'ye bir izomorfizmaya indirgenir."

Bahsi geçen otomorfizmayı bulmak için, [17]'deki bulguların ışığında, *F/G* 'nin *F/H*'ye izomorf olmasını varsaydık. Öncelikle, bu izomorfizmayı, *J, R'*nin Jacobson Radikali olmak üzere, $G' = G \cap JG, H' = H \cap JH$, *F/G'* ile *F/H'* arasında bir izomorfizmaya yükseltgedik. Burada, *F/JF*'nin yarıbasit modül olmasını kullandık [13,V.2]. *F* 'nin izdüşel olmasını kullanarak bu izomorfimayı *F* üzerinde bir fonksiyona yükseltgeyip, Nakayama Önsavını kullanarak (*F* sonlu üretilmiş olduğu için), bu fonksiyonun istediğimiz otomorfizma olduğunu gösterdik.

Bir diğer önemli gereç,

"Gereç 2: Bir önceki gerecin varsayımını elde etmek, yani *P* gibi bir izdüşel *R*-modülü bulmak öyle ki *F/G* ile *P/H* izomorf olsun. "
Bunu da [17, Lemma 2.7]'yi sonlu karakter halkaları için genelleştirerek elde ettik. Bu noktada, *G*'nin sonlu üretilmiş olmasını varsayarak, Nakayama'nın Önsavı'nı kullandık.

Şimdiye kadarki elde edilen gereçler, zayıf izomorfizmaların karşılaştırılmasında kullanılmıştır. Ancak, bunlara ek olarak, kararlı izomorfizma için bir tane daha gereci elde etmek gerekti. Bu son gereç, 2.1'de bahsetmiş olduğumuz gereç ve 2.2'de bahsetmiş olduğumuz Gereç 1'deki homomorfizmların indirgenip yükseltgenmesine dayanmaktadır:

"Gereç 3: *R* bir sonlu karakter tamlık bölgesi, *F* sonlu üretilmiş serbest rankı *n* bir *R*-modülü, *P* sonlu üretilmiş rankı *n* olan izdüşel bir *R*-modülü olsun. *G, F'* nin rankı *n* olan bir alt modülü ve *H, P'*nin rankı *n* olan bir alt modülü olsun. Eğer $F/G \cong H/P$ ise, öyle ki *Ann(F/G)=Ann(P/H),*o zaman öyle bir rankı bir olan izdüşel bir *R*-modülü *A* vardır ki $\alpha: F \oplus R \to P \oplus A$ izomorphizması vardır ki, $\alpha(G \oplus R) = H \oplus A$."

Burada bir noktaya da dikkat çekmek isteriz. Gereç 3'ü dayandırdığımız homomorfizmaların yükseltgenip indirgenmesini başarabilmek için, sadece sonlu karakter bölgeleri değil onlardan daha genel olan neredeyse yerel-bütünsel halkalar için geçerli olan aşağıdaki önermeyi ispatladık.

**Önerme 1:** *R* bir neredeyse ***yerel-bütünsel*** bir tamlık bölgesi, *P* sonlu üretilmiş sonlu rankı olan izdüşel bir *R*-modülü olsun. O zaman *P* sonlu rankı olan serbest bir *R*-modülü ve tersinebilir bir idealin dik toplamına izomorftur.

**2.3 Amaç 3'ü tamamlamak için elimizdeki gereçler ve uygulanan yöntemler**

Projemizin üçüncü amacı:

"Sonlu karakter bir halkada idealler ve parçalanamaz modüller için Krull- Schmidt ile zayıf Krull-Schmidt özelliklerini incelemek."

idi. Bu incelemede, sonlu karakter halkaları üzerinde, *sonlu üretilmiş* modüller için yapmış olduğumuz, zayıf izomorfizmların birbirlerine denklik durumlarını kullandık.

TÜBİTAK

## 3. BULGULAR

### 3.1 Zayıf İzomorfizmaların Karşılaştırılması

İlk amacımız doğrultusunda, sonlu karakter tamlık bölgeleri üzerinde, burulmasız modüller için, yerel, handiyse ve kararlı izomorfizmalarını karşılaştırarak, belli koşullar altında denkliklerini ispatladık.

#### 3.1.1 Yerel İzomorfizma ve Kararlı İzomorfizma ne zaman denktir?

*R* bir sonlu karakter bölgesi, *G* ve *H* sonlu rankı olan burulmasız *R*-modülleri olsun. İlk bulgumuz, *G* ve *H*'nin yerel izomorfik olması hangi durumlarda kararlı izomorfik olmasına denk olabileceği yönünde gelişti:

**Teorem 1:** *R,* Picard grubu 0 olan, bir sonlu karakter bölgesi, *G* ve *H* rankı *n* olan burulmasız *R*-modülleri olsun. Eğer *G* sonlu üretilmiş ise, aşağıdakiler birbirine denktir:

**a.** *R*'nin her azami ideali *M* için, $G_M \cong H_M$.

**b.** Öyle $F_1$ ve $F_2$ serbest *R*- modülleri vardır ki, $G \subseteq F_1 \subseteq QG$ ve $H \subseteq F_2 \subseteq QH$ olmak üzere, $F_1/G \cong F_2/H$.

**c.** *G* ve *H* kararlı izomorfiktir.

**d.** *A* sonlu üretilmiş bir *R*-modülü olmak üzere, $G \oplus A \cong H \oplus A$.

**e.** Bir $m > 0$ için, $G^{(m)} \cong H^{(m)}$.

Yukarıdaki teoremin ispatına bakıldığında, yerel izomorfizma ile kararlı izomorfizmayı birbirine bağlayan madde b'dir. Bu geçiş maddesinin dayanağı, 2.2'de bahsettiğimiz Gereç 2'dir. Ayrıca, Picard grubun 1 olması nedeniyle, her sonlu üretilmiş izdülşel modülün serbest olmasıdır. Gereç 2'yi açmak gerekirse:

**Önsav 1:** *R* bir sonlu karakter bölgesi ve *F* sonlu üretilmiş *n* rankı olan bir serbest *R*-modülü olsun. Eğer *G, F*'nin rankı *n* olan sonlu üretilmiş bir *R*-altmodülü ise ve *H*, *F*'nin, burulmasız bir *R*-altmodülü ise, öyle ki *R*'nin her azami ideali *M* için, $G_M \cong H_M$ olsun. O zaman, öyle bir QH'nin sonlu üretilmiş izdüşel bir *R*-altmodülü *P* vardır ki, $H \subseteq P, F/G \cong P/H$.

Dolayısıyla, teoremin ilk üç maddesinin denkliğini göstermek, Önsav 1 ve 2.2'de bahsettiğimiz Gereç 3 ile mümkün olmuştur. Diğerleriyle olan denklikler için [10]'daki temel sonuçlar ile aşağıdaki önsav kullanılmıştır:

**Önsav 2:** *R* bir sonlu karakter bölgesi olsun. Eğer *I, R*'nin herhangi bir ideali ve *n>0* ise, $I^n \cong R$ olması için gerekli ve yeterli koşul $I^{(n)} \cong R^{(n)}$'dir.

Önsav 2, [17]'deki Önsav 2.9'un genelleştirilmesidir. Görülmüştür ki, gereklilik her tamlık bölgesi için doğrudur. Yeterliliği ispatlarken halkanın sonlu karakter halkası olması yeterlidir. Bu da [17]'deki Önsav 2.6'nın genelleştirilmesine dayanmaktadır:

**Önsav 3:** *R* bir sonlu karakter bölgesi, *G* burulmasız bir *R*-modülü olsun. Eğer, *R*'nin her azami ideali *M* için, $G_M$ bir serbset $R_M$ −modülü ise, *G* izdüşeldir; eğer, *G*'nin rankı 2'den büyük veya eşit ise, *G* serbest bir *R*-modülü ile tersinebilir bir idealin dik toplamına izomorftur.

### 3.1.2 Yerel İzomorfizma ve Handiyse İzomorfizma ne zaman denktir?

*R* bir sonlu karakter bölgesi, *G* ve *H* sonlu rankı olan burulmasız *R*-modülleri olsun. İkinci bulgumuz, *G* ve *H*'nin yerel izomorfik olması hangi durumlarda handiyse izomorfik olmasına denk olabileceği yönünde gelişti:

**Teorem 2:** *R* bir sonlu karakter bölgesi, *G* ve *H* rankı *n* olan burulmasız *R*-modülleri olsun. Eğer *G* sonlu üretilmiş ise, aşağıdakiler birbirine denktir:

**a.** *R*'nin her azami ideali *M* için, $G_M \cong H_M$.

**b.** Öyle $F$ ve $P$ sonlu üretilmiş izdüşel *R*- modülleri vardır ki, $G \subseteq F \subseteq QG$ ve $H \subseteq P \subseteq QH$ olmak üzere, $F_1/G \cong F_2/H$.

**c.** *J* tersinebilir bir *R* ideali olmak üzere, $G \oplus R \cong H \oplus J$.

**d.** *A, B* sonlu üretilmiş izdüşel *R*-modülleri olmak üzere, $G \oplus A \cong H \oplus B$.

**e.** *G* ve *H* handiyse izomorfiktir.

Yukarıdaki teoremin ispatına bakıldığında, a ve b maddelerinin denkliği 2.2'de açıklanan Gereç 1 ve 3.1.1'de belirtilen Önsav 1 dayanmaktadır. Bunların c ve d maddelerine denk olması ise Önsav 1 ile Önsav 3 uygulanması sonucu elde edilen bir otomorfizma, $\alpha: F \oplus R \to F \oplus R$ , ve tersinir bir ideal *J* 'nin, bir örten homomorfizma $G \oplus R \to H \oplus J$ vermesiyle görülebilir.

Burada şu noktaya dikkat çekmek isteriz ki handiyse izomorfizma, her zaman, yerel izomorfizmadır. Bu teoremle görülmektedir ki, sonlu karakter halkaları üzerinde, yerel izomorfizmanın handiyse olabilmesi için burulmasız modüllerden birinin sonlu temsil ediliyor olması gerekmektedir. Buradaki en önemli nokta, bu tip burulmasız modüller için bilinen, [14]'teki Önsav V.2.4, *M* herhangi bir azami *R*-ideali olmak üzere,

$$Hom_R(G,H) \otimes R_M \cong Hom_{R_M}(G_M, H_M).$$

### 3.1.3 Yerel, Kararlı, ve Handiyse İzomorfizmalar ne zaman denktir?

3.1.1 ve 3.1.2 anlattığımız bulgularımız sonucu aşağıdaki teoremi elde ettik:

**Teorem 3:** *R* bir sonlu karakter bölgesi, *G* ve *H* rankı *n* olan burulmasız *R*-modülleri olsun. Eğer *G* sonlu üretilmiş ise, aşağıdakiler birbirine denktir:

**a.** *G* ve *H* yerel izomorfiktir.

**b.** *G* ve *H* kararlı izomorfiktir.

**c.** *G* ve *H* handiyse izomorfiktir.

### 3.1.4 Bulgularımızın Uygulamaları

**Önerme 1:** *R* bir sonlu karakter bölgesi olsun öyle ki çoğu azami *R*-ideali *M* için, $R_M$ değerleme tamlık bölgesi olsun. *A, B, C* burulmasız *R*-modülleri olsun.
*A* sonlu üretilmiş bir *R*-modülü ve *A* 'nın her görüntüsü sonlu temsil edilir olsun.Eğer $A_M \cong (B \oplus C)_M$ ise, $A = B' \oplus C'$'dir öyle ki $B_M \cong B'_M, C_M \cong C'_M$.

Bu önerme, Önsav 1 ve Teorem 2'ye dayanmaktadır. Teorem 2'ye göre $A_M \cong (B \oplus C)_M$ ise *A* ve $B \oplus C$ handiyse izomorfiktir. Bu çeşit izomorfizmanın tanımına göre, her sıfırdan farklı $R$-ideali $I$ için öyle bir gömme homomorfizması $f: A \to B \oplus C$ vardır ki $Ann_R\left(\frac{A}{f(B \oplus C)}\right) + I = R$. Önermedeki $B' = f(A)$ ve *C'* ise gene bu homorfizmadan gelen bir *R*-modülü olup, her ikisi de istenen şartları sağlamaktadır.

Bu önermenin ve bulgularımızın bir sonucu:

**Sonuç:** *R,* Önerme 1'deki koşulları sağlasın ve *G* sonlu temsil edilir burulmasız bir *R*-modülü olsun. *G*'nin ayrışamaz olması için gerekli ve yeterli koşul *G*'nin ayrışamaz burulmasız bir *R*-modülüne izomorf olmasıdır.

Önerme 1'in ispatında, $f(A)$'nın sonlu temsil edilir olması kullanılmaktadır. Sonucumuzda is $f(A) = G$ olmasından dolayı, burada $G$'nin sonlu temsil edildiğini varsayıyoruz.

### 3.2 Sonlu Karakter Bölgeleri Üzerinde Krull-Schmidt Özellikleri

Bir diğer amacımız, sonlu karakter bölgeleri üzerindeki burulmasız modüllerin KSÖ ve ZKSÖ'lerini incelemekti. Bu özelliklerin incelenmesinde, zayıf izomorfizmaların karşılaştırılmasıyla elde edilen sonuçları kullandık. Bununla birlikte [18]'deki, h-yerel bölgeler üzerinde incelenen KSÖ ve ZKSÖ'leri, sonlu karakter bölgelerine genelleştirdik. Ancak bunu yaparken Krull-Schmidt özelliklerini, *sonlu üretilmiş* burulmasız modüller için inceledik. Bunun sebebi ise, ispatladığımız zayıf izomorfizmaların karşılaştırılmasında *sonlu üretilme* varsayımını eleyememek.

Burada, doktora öğrencimizle, ispatını tamamlamaya çalıştığımız, [18]'deki Teorem 3.4 genelleştirilmesi olan temel öngörümüz:

**Teorem 4:** *R* sonlu karakter tamlık bölgesi olsun, *M* bir tümleyen ideal olsun ve her azami *R*-ideali $N \neq M$ için $R_N$ ayrık değerleme halkasıdır.

**a.** *R,* sonlu üretilmiş idealleri için *ZKSÖ'*yü sağlar ancak ve ancak $Pic(R)$ burulmasız ise ve *R*'nin öyle bir tümleyici ideali varsa ki $R_M$ sonlu üretilmiş *R*- idealler için KSÖ'yü sağlasın.

**b.** *R* sonlu üretilmiş idealleri için KSÖ'yü sağlar ancak ve ancak $Pic(R) = 0$ ve *R*'nin öyle bir tümleyici ideali varsa ki $R_M$ sonlu üretilmiş *R*- idealler için KSÖ'yü sağlasın.

**c.** *R,* sonlu üretilmiş burulmasız *R*-modülleri için *ZKSÖ'*yü sağlar ancak ve ancak $Pic(R)$ burulmasız ise ve *R*'nin öyle bir tümleyici ideali varsa ki $R_M$ sonlu üretilmiş *R*-modülleri için ZKSÖ'yü sağlasın.

**d.** *R,* sonlu üretilmiş burulmasız *R*-modülleri için *ZKSÖ'*yü sağlar ancak ve ancak yerel olarak izomorf olan modüller izomorfik ise ve *R*'nin öyle bir tümleyici ideali varsa ki $R_M$ sonlu üretilmiş *R*- modülleri için KSÖ'yü sağlasın.

**e.** *R,* sonlu üretilmiş rankı 1 olan *R*-modülleri için *ZKSÖ'*yü sağlar ancak ve ancak $Pic(R) = 0$ ve *R*'nin öyle bir tümleyici ideali varsa ki $R_M$ sonlu üretilmiş rankı 1 olan modüller için KSÖ'yü sağlasın.

Bu teoremin a, b, c ve d maddelerini ispatladık. Bunların ispatı Teorem 1 ve 2 'ye dayanmaktadır. Ayrıca, [18]'deki Teorem 2.7'nin genelleştirilmesini kullanmamız gerekti:

**Önsav 4:** *R* bir sonlu karakter tamlık bölgesi olsun. *R*'nin sonlu üretilmiş idealler için KSÖ'yü sağlaması ancak ve ancak *R* sonlu üretilmiş idealler için ZKSÖ'yü sağlıyor ve $Pic(R) = 0$.

Önsav 4'ün [18]'deki versiyonunda, yazarların, rankı 1 olan modüller ile ilgili ispat ettiği [18, Önsav 2.6] kullanılmaktadır. Biz henüz bunun bir genelleştirmesini bulamadık, ancak Önsav 4'ü ispatlamak için işimize yarayacak bir sonuç çıkardık:

**Önsav 5:** *R* bir sonlu karakter tamlık bölgesi, *I,J* idealleri olsun. Eğer *I* sonlu üretilmiş ise, bir *n* için, $I^{(n)} \cong J^{(n)}$ ancak ve ancak $I \cong J$.

Bu önsav, Teorem 1 ve Önsav 2'ye dayanmaktadır.

Şu ana kadar, sonlu karakter halkaları üzerinde, rankı 1 olan modüller üzerinde Krull-Schmidt özelliklerine hakim değiliz. Dolayısıyla, teoremin e maddesi konusunda çalışma yapamadık. Fakat, Önsav 4'ü rankı 1 olan modüller için genelleştirebilirsek, bu maddeyi ispatlayabileceğimizi öngörüyoruz.

## 4. TARTIŞMA/SONUÇ

### 4.1 Projemiz sonuçları:

#### 4.1.1 Zayıf izomorfizmaların denklik durumları

İlk amacımız, sonlu karakter bölgeleri üzerinde, burulmasız modüller için, handiyse, kararlı ve yerel olarak adlandırdığımız zayıf izomorfizmaların denkliklerinin araştırılmasıydı. Bunu yapabilmek için [17]'deki, h-yerel tamlık bölgeleri üzerinde, zayıf izomorfizmaların hangi durumlarda denk olabileceğini genelleştirmeye çalıştık. Sonuç olarak, 3.1'de de açıkladığımız üzere, ilk planımızın işe yaramaması sonucu B planımıza yönelerek, her üç zayıf izomorfizmanın da birbirlerine ne zaman denk olabileceğini gösterdik (Teorem 3).

Sonlu karakter tamlık bölgeleri üzerinde, iki burulmasız modülün, hem yerel hem de kararlı olarak izomorfik olmaları için, bu modüllerden birinin *sonlu üretilmiş* olmasını varsayılmıştı. Bunun sebebi ise, Önsav 1'de, *Nakayama Önsav*'ını kullanabilmekti. Biz, şimdiye kadar, bu varsayımın kaldırılması durumunda bu iki zayıf izomorfizmanın denkliğine dair bir şey söyleyemedik. Ayrıca, bu varsayımın mutlaka olması gerektiğini gösteren bir karşıt örnek de bulamadık. Eğer, yarıyerel (sonlu sayıda azami ideali olan halka) bir tamlık bölgesi üzerinde, yerel olarak izomorfik olan ama izomorfik olmayan iki tersinebilir ideal bulabilirsek, karşıt bir örnek elde edebileceğimizi düşünüyoruz. Böyle bir örneği düşünmemizin sebebi, Gereç 1'e dayanmaktadır.

Sonuç olarak, sonlu karakter bölgeleri üzerinde, aldığımız iki burulmasız modül için, kararlı, yerel ve handiyse izomorfizmaların denkliklerini, bu modüllerden birinin sonlu üretilmiş olma durumunda, gösterdik.

Buradaki bulugularımızı sonuçlarımızla beraber bir makalede derleyip, SCI düzeyinde bir dergiye (Journal of Pure and Applied Algebra) gönderdik [6].

#### 4.1.2 Krull-Schmidt özellikleri

Proje önerimizde, Krull-Schmidt özelliklerini, sonlu karakter halkalarından daha genel olan, neredeyse yerel-bütünsel tamlık bölgeleri üzerinde incelemeyi amaçlamıştık. Ancak, önerimizde de bahsettiğimiz üzere, göstermeyi planladığımız zayıf izomorfizma denkliklerinde ihtiyacımız olan ana araç (Önsav 3)'ın ispatı için B planımızı uygulamak durumunda kaldık. Dolayısıyla, takvimimizin son kısmında, Krull-Schmidt özelliklerini, sonlu karakter halkaları üzerindeki burulmasız *sonlu üretilmiş* modüller için, incelemeye başladık.

Öncelikle, bu özellikleri, h-yerel halkalar üzerindeki burulmasız modüller için inceleyen [18]'i analiz ettik. Ve buradaki sonuçları sonlu karakter bölgeleri için genelleştirmeye çalıştık. [18]'deki Teorem 3.4'te, idealler ve rankı 1 olan modüller için, hem KSÖ hem de ZKSÖ incelenmiştir. Bu teoremin ispatının büyük kısmı [17]'deki, zayıf izomorfizma denkliklerine dayanmaktadır. 4.1'de de bahsettiğimiz üzere, biz, bu denklikleri *sonlu üretilmiş* modüller için genelleştirebildik. Bunun sonucu olarak Teorem 4'ü öngördük. Bu teoremin ilk dört maddesini zayıf izomorfizmaların denkliklerini konu alan makalemiz [6]'deki bulgularımız ve sonuçlarımızla ispatladık. Teoremimizin son maddesi, henüz bir öngörü aşamasındadır.

### 4.2 Öneriler:

Projemizde elde ettiğimiz sonuçlar ve öngörüler doğrultusunda, sonlu karakter halkaları üzerinde, şimdilik, sonlu üretilmiş modüller için Krull Schmidt özelliklerini incelemek daha yere basan bir araştırma gibi görünmektedir. Bu araştırmamızın litaratüre önemli bir katkı yaptığını düşünüyoruz. Çalışmamız esnasında yapmış olduğumuz bazı taramalar neticesinde, değer halkaları üzerinde tanımlanmış sonlu üretilmiş modüller üzerinde, Krull-Schmidt özelliklerini inceleyen makaleler [28] ve [33] bulduk.

Teorem 4'ün e şıkkının [18]'deki versiyonunun ispatı, rankı 1 olan modülleri anlamanın yanı sıra, gruplar için geliştirilmiş ve modül teoriye adapte edilmiş olan, bir başka zayıf izomorfizmaya, yarı-izomorfizmalara, dayanmaktadır. Henüz bu iki konu hakkında gerekli çalışmaları yapamadık. Ancak, hem [18] hem de [33]'de, Krull-Schmidt özellikleri için, bu zayıf izomorfizmanın kullanılıyor olması, bizim de bu izomorfizma çeşidini anlamamızın Teorem 4'ün e şıkkını ispat etmek için faydalı olabileceğini düşündürtüyor. Bundan sonraki çalışmalarımızı bu kısımda yoğunlaştıracağız, doktora öğrencimizle [33]'ü analiz edip, Teorem 4'ün ispatını tamamlamayı amaçlıyoruz.

## KAYNAKLAR


1. Arnold D., Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings, Lecture Notes in Mathematics, 931, Springer-Verlag, (1982).
2. Atiyah M. F., On the Krull-Schimdt theorem with applications to sheaves, Bulletin de la S.M.F.,84, 307-317, (1956).
3. Azumaya G., Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem, Nagoya Math. J., 1, 117-124, (1950).
4. Ay B., Unique Decomposition Direct Sums of Ideals, Ph.D. dissertation, FAU, (2010).
5. Ay B., Unique Decomposition into Ideals for Reduced Commutative Noetherian Rings, II, Journal of Pure and Applied Algebra, 216, 743-751, (2012).
6. Ay B., Klingler L., Locally isomorphic torsionless modules over domains of finite character, Journal of Pure and Applied Algebra, submitted.
7. Ay B., Klingler L., Unique Decomposition into ideals for Reduced Commutative Noetherian Rings, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 363, 3703-3716, (2011).
8. Brewer J., Klingler L., The Ordered Group of Invertible Ideals of a Prüfer Domain of finite character, Communications in Algebra, 33, 4197-4203, (2005).
9. Brewer J., Klingler L., Pole Assignability and the Invariant Factor Theorem in Prüfer Domains and Dedekind Domains, J. Algebra, 111, 536-545, (1987).
10. Dade E. C., Algebraic integral representations by arbitrary forms, Mathematika, 10, 96-100, (1963).
11. Estes D., Guralnick R., Module equivalences: local to global when primitive polynomials represent units, J. Algebra, 77, 138-157, (1982).
12. Facchini A., Krull-Schmidt fails for serial modules, Transactions of the American Mathematical Society, 348, 4561-4575, (1996).
13. Fuchs L., Salce L. , Modules over non-Noetherian Domains, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Vol. 84, (2000).
14. Griffin M., Rings of Krull Type, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1968, Issue 229, 1-27, (1968).
15. Gabriel P., Dés categories abéliennes, Bull. Soc. Math. France, 90, 323-448, (1962).

16. Goeters P., Olberding B., Unique Decomposition into ideals for Noetherian Domains, J. Pure Appl. Algebra, 165, 169-182, (2001).
17. Goeters P., Olberding B., On Locally Isomorphic Torsion-free Modules, International Journal of. Commutative Rings, 1, 83-94, (2001).
18. Goeters P., Olberding B., The Krull Schmidt Property for Ideals and Modules over Integral Domains, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 32, 4, 1409-1429, (2002).
19. Jaffard P., Théorie Arithmétique des anneaux du type de Dedekind, Bull. Soc. Math. France, 80, 61-100, (1952); ibid., 81, 41-61, (1953).
20. Krull, W., Matrizen, Moduln und verallgemeinerte Abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen, Heidelberger Akademie der Wissenschaften, 2, 13-18, (1932).
21. Krull W., Uber verallgemeinerte endliche abelsche gruppen, Math. Z., 3, 161-196, (1925).
22. Levy L., Odenthal C., Krull-Schmidt theorems in dimension 1, Trans. Amer. Math. Soc., 348, 9, 3391-3455, (1996).
23. Levy L., Odenthal C., Package deal theorems and splitting orders in dimension 1, Trans. Amer. Math. Soc. 348, 9, 3457-3503, (1996).
24. Matlis E., Cotorsion Modules, Mem. Amer. Math. Soc., 49, (1964).
25. McDonald, B.R., Waterhouse W.C., Projective modules over rings with many units, Proc. Amer. Math. Soc., 83, 455- 458, (1981).
26. Remak R., Uber die zerlegung der endlichen gruppen in direkte unzer-leghare faktoren, J. Reine Angew. Math., 139, 293-308, (1911).
27. Rush D., Rings with two-generated ideals, J. Pure Appl. Algebra, 73, 257-275, (1991).
28. Salce L, Zanardo P., On two-generated modules over valuation domains, Arch. Math. (Basel), 46, 408-418, (1986).
29. Schmidt O., Uber unendliche gruppen mit endlicher kette, Math. Z., 29, 34-41, (1928).
30. Warfield R.B., Jr., A Krull-Schmidt theorem for infinite sums of modules, Proc. Amer. Math. Soc., 22, 699-719, (1969).
31. Warfield, R.B., Serial rings and finitely presented modules, J. Algebra, 37, 187-222, (1975).

32. Wedderburn J.H.M., On the direct product in the theory of finite groups, Ann. Math., 10, 173-176, (1909).

33. Zanardo P, Quasi-isomorphisms of finitely generated modules over valuation domains, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 151,109-123, (1988).

# TÜBİTAK
# PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

| | |
|---|---|
| Proje Yürütücüsü: | Yrd. Doç. Dr. BAŞAK AY SAYLAM |
| Proje No: | 113F235 |
| Proje Başlığı: | Noether Olmayan Halkalar Üzerinde Krull Schmidt Özellikleri |
| Proje Türü: | 3501 - Kariyer |
| Proje Süresi: | 36 |
| Araştırmacılar: | |
| Danışmanlar: | LEE KLİNGLER (Yurt Dışı) |
| Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi: | İZMİR YÜKSEK TEKNOLOJİ ENS. FEN F. MATEMATİK B. |
| Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: | 01/03/2014 - 01/10/2017 |
| Onaylanan Bütçe: | 157870.0 |
| Harcanan Bütçe: | 119920.17 |
| Öz: | Modül teorideki en popüler sorulardan biri, bir modulün hangi durumlarda parçalanamaz modüllerin direkt toplamı olarak tek bir şekilde, eş yapılıları saymazsak, ifade edilebileceğidir. Bu probleme Krull-Schmidt problemi diyoruz. Projemizde, sonlu karakter bölgeleri ve neredeyse yerel-bütünsel halkalar halkalar üzerinde sonlu ideal direkt toplamlarla ilgilendik. Projemiz, Goeters ve Olberding?in bu problemi h-yerel halkaları üzerinde incelemiş olduğu iki makaleyi temel almaktadır. Öncelikle, sonlu karakter bölgeleri ve neredeyse yerel-bütünsel halkalar üzerinde, handiyse, yerel ve kararlı olarak adlandırdığımız zayıf izomorfizma özellikleri hakkında sonuçlar elde ettik. Daha sonra bunları kullanarak bu halkalar üzerinde Krull-Schmidt özelliklerini inceledik. |
| Anahtar Kelimeler: | sonlu karakter halkaları;handiyse,yerel,kararlı izomorfizmalar;sonlu üretilmiş modül. |
| Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?: | Hayır |