TÜBİTAK

Ginzburg - Landau Denklemlerinin Dinamik Sınır Koşulları Altında Çözümlerinin Analizi

Program Kodu: 3501

Proje No: 115F055

Proje Yürütücüsü:
Doç. Dr. Türker Özsarı

Bursiyer:
Dr. Jamila Kalantarova

MAYIS 2017
İZMİR

Önsöz

"Ginzburg - Landau Denklemlerinin Dinamik Sınır Koşulları Altında Çözümlerinin Analizi" olarak adlandırılan bu proje TÜBİTAK 3501 kapsamında desteklenen bir araştırma projesidir. Proje 1 Ekim 2015 tarihinde başlamış olup 1 Nisan 2017 tarihinde son bulmuştur. Projenin yönetici kurumu İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü'dür.

Proje matematiğin kısmi diferansiyel denklemler alanında, başlangıç-sınır değer problemleri konusuna ait, dinamik sınır koşullarının düşünüldüğü problemlere özgü bir çalışmayı içermektedir. Bu projede çalıştığımız problemleri kısmi diferansiyel denklemler teorisinin hem klasik hem de modern yaklaşımları ile ele aldık. Projede çözülen problemler ve kanıtları elimizden geldiğince özenli ve tam bir şekilde vermeye çalıştık. Projeyi basitten zora doğru bir yaklaşımla tamamlamaya çalıştık. Önce doğrusal, sonra doğrusal'a yakın ve son olarak tümüyle doğrusal olmayan modeli inceledik. Bu çalışmanın hem iyi konulmuşluk problemlerini, hem de çözümlerin davranışsal özelliklerini incelediğinden kapsamlı bir çalışma olduğu, kısmi diferansiyel denklemlerin hem analizi hem de kontrol teorisi konularına değindiği söylenebilir.

Bu projeyi tamamladığımızda elde ettiğimiz sonuçları gözden geçirip önerilerde bulunan Prof. Dr. Varga Kalantarov'a (Koç Üniversitesi), proje üzerine yazdığımız makalenin İngilizcesini gözden geçiren ve düzeltmeler yapan eşim Katherine Özsarı'ya ve projede resmi bir araştırmacı olarak yer almasa da benimle birlikte çalışan Wellington José Corrêa'ya (Universidade Tecnológica Federal do Paraná) minnettarım. Son olarak, proje süresi boyunca vermiş olduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a da teşekkür ederim.

Türker Özsarı
Mayıs, 2017
İYTE

İçindekiler

Özet

Karmaşık Ginzburg-Landau denklemleri (CGLE) için başlangıç dinamik sınır değer problemlerini (idbvp) $\mathbb{R}^N$'in sonlu bölgelerinde, verilen matematiksel modeli Wentzell başlangıç-sınır değer problemine (ibvp) çevirerek çalışıyoruz. İlk önce doğrusal homojen idbvp'yi düşünüyoruz. İkinci olarak bölgenin içinde ve sınırında forcing olduğu doğrusal modeli çalışıyoruz. Daha sonra, doğrusal olmayan idbvp'yi bölgenin içinde Lipschitz tipindeki, sınırında uygun bir manada monotone terimlerle analiz ediyoruz. Kuvvet tipindeki doğrusal olmayan terimlerle yazılan CGLE idbvp için lokal iyi konulmuşluk problemini sabit nokta teorisini kullanarak çözüyoruz. Düzgün çözümler için global iyi konulmuşluğu elde ediyoruz. Zayıf çözümlerin varlığı ve tekliğini kanıtlıyoruz. Evolüsyon operatörünün düzgünleştirici etkisini kanıtlıyoruz. Bu literatürde doğrusal olmayan Schrödinger denklemleri için elde edilen sonuçlardan daha iyi sonuçlar elde edilmesine olanak tanıyor. Çalışmamızın en ilginç sonuçlarından biri dinamik sınır koşulları altında düşünülen doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin çözümlerinin aynı sınır koşullarına maruz CGLE'nin çözümlerinin inviskid limiti olarak elde edilebileceğinin kanıtlanmasıdır. Son olarak, çözümlerin uzun zaman davranışlarını karakterize ediyoruz ve çözümlerin enerjisinin üssel hızda sıfıra yaklaştığını kontrol teorisinin yöntemlerini kullanarak ispatlıyoruz.

Anahtar kelimeler: Karmaşık Ginzburg-Landau denklemleri, dinamik sınır koşulu, Wentzell sınır koşulu, lokal/global iyi-konulmuşluk, zayıf çözümler, düzgün çözümler, inviskid limit, doğrusal olmayan Schrödinger denklemleri, çözümlerin kararlılaştırılması

Abstract

The initial-dynamic boundary value problem (idbvp) for the complex Ginzburg-Landau equation (CGLE) on bounded domains of $\mathbb{R}^N$ is studied by converting the given mathematical model into a Wentzell initial-boundary value problem (ibvp). First, the corresponding linear homogeneous idbvp is considered. Secondly, the forced linear idbvp with both interior and boundary forcings is studied. Then, the nonlinear idbvp with Lipschitz nonlinearity in the interior and monotone nonlinearity on the boundary is analyzed. The local well-posedness of the idbvp for the CGLE with power type nonlinearities is obtained via a contraction mapping argument. Global well-posedness for strong solutions is shown. Global existence and uniqueness of weak solutions are proven. Smoothing effect of the corresponding evolution operator is proved. This helps to get better well-posedness results than the known results on idbvp for nonlinear Schrödinger equations (NLS). An interesting result of this paper is proving that solutions of NLS subject to dynamic boundary conditions can be obtained as inviscid limits of the solutions of the CGLE subject to same type of boundary conditions. Finally, long time behaviour of solutions is characterized and exponential decay rates are obtained at the energy level by using control theoretic tools.

Keywords: Complex Ginzburg-Landau equations, dynamic boundary conditions, Wentzell boundary conditions, local/global well-posedness, weak/strong solutions, inviscid limits, nonlinear Schrödinger equations, stabilization of solutions

1. **Giriş ve Literatür Özeti**

Bu araştırma aşağıdaki karmaşık Ginzburg-Landau denklemi (CGLE) için başlangıç sınır değer problemini (idbvp) analiz etmeyi amaçlamaktadır:

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} u_t-(\lambda+i\alpha)\Delta u+f(u)=0 & \Omega\times\mathbb{R}_+\text{'da ,} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}=-g(u_t) & \Gamma_1\times\mathbb{R}_+\text{'da ,} \\ u=0 & \Gamma_0\times\mathbb{R}_+\text{'da ,} \\ u(0)=u_0 & \Omega\text{'da .} \end{cases}
$$

(1.1)'de, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ sınırı (Γ) düzgün ve Γ_0 ve Γ_1 gibi iki boş olmayan, kesişmeyen, bağlantılı, $(n-1)$-boyutlu manifoldun birleşimi olan, sonlu bir bölgeyi temsil etmektedir. $u=u(x,t)$ karmaşık salınım genliğini temsil eden karmaşık değerli bir fonksiyondur. $f(u)$ ya $f(u)=(\kappa+i\beta)|u|^{p-1}u-\gamma u$ şeklinde (Bölüm 6-10) ya da uygun bir Lipschitz fonksiyon olarak tanımlanacak (Bölüm 5). Burada, $\beta\in\mathbb{R}$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ (doğrusal olmayan) frekans ve (doğrusal) yayılma parametreleridir. Genelliği bozmadan, α pozitif alınabilir. Bu yüzden yazının tamamında $\alpha>0$ olduğunu varsayacağız. β kuvvet tipi doğrusal olmayan terimler için global çözümleri tartıştığımızda pozitif varsayılacak, onun dışındaki kısımlarda her iki işareti de alabilir. $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ birim dış normal vektörü temsil edecek. $p\geq 2$'ye kuvvet indeksi adını vereceğiz. Diğer parametrelerin $\lambda,\kappa>0,\gamma\in\mathbb{R}$ sağladığını varsayacağız. $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ karmaşık değerli bir fonksiyon olup ya birim fonksiyon (Bölüm 2-4,6-10) ya da uygun bir manada monotone bir fonksiyonu temsil edecek (Bölüm 5). Bunun için Varsayım 2.1'e bakınız.

CGLE matematiksel fizikte, Hopf-bifurkasyona yakın bir reaksiyon-difüzyon denklemi gibi, kritiğe-yakın kararsız dalgaları modelleyen temel bir modeldir. Bu denklemin bazı somut uygulamaları doğrusal olmayan dalgalar, ikinci-mertebe faz geçişleri, süperiletkenlik, süperakışkanlık, Bose-Einstein yoğunlaşması ve sıvı kristaller olarak sayılabilir. [Aranson ve Kramer, 2002] ve içindeki referanslara bakınız.

CGLE doğrusal olmayan ısı ve doğrusal olmayan Schrödinger denklemlerini (NLS) aynı anda genelleştirir. Bu denklemler (α,β) ve (λ,κ) parametre çiftlerinin sıfır olduğu durumda elde edilebilir. CGLE'nin doğrusal olmayan ısı denklemi ve NLS ile bazı benzer karakteristik özellikler taşıdığını beklemek doğaldır. Isı denklemi ve Schrödinger denklemi dinamik sınır koşulları altında bir nebze çalışılmıştır. Ancak CGLE için bu yönde henüz bir çalışma yapılmamıştı. CGLE ile ilgili çalışmaların pek çoğu doğrusal ya da doğrusal olmayan bölge içi-sınırı arasındaki olası etkileşimlerden arındırılmış ideal modelleri incelemiştir. Örneğin [Bechouche ve Jüngel, 2000], [Cazenave vd., 2013], [Clément vd., 2012], [Doering vd., 1994], [Ginibre ve Velo, 1996], [Ginibre ve Velo, 1997], [Masmoudi ve Zaag, 2008], [Okazawa, 2006], [Okazawa ve Yokota, 2002], [Shimotsuma vd., 2016], [Shimotsuma vd., 2014] ve [Tang ve Wang, 1995] homojen ya da periyodik sınır koşulları altında ya da tüm uzayda CGLE için varlık problemlerini incelemiştir. CGLE için homoejen olmayan sınır koşulları ile ilgi bir kaç çalışma mevcuttur ([Aamo vd., 2005], [Aamo vd., 2007], [Gao ve Bu, 2004]-[Gao vd., 2003], [Rosier ve Zhang, 2009]). CGLE'nin limit durumu olarak düşünebilecek NLS için homojen olmayan sınır koşulları yakın zamanda daha çok ilgi gördü, örneğin bakınız [Audiard, 2013], [Audiard, 2015], [Batal ve Özsarı, 2016], [Erdoğan ve Tzirakis, 2016], [Fokas vd., 2017], [Holmer, 2005], [Kaikina, 2013], [Kalantarov ve Özsarı, 2016], [Lasiecka ve Triggiani, 1992], [Lasiecka ve Triggiani, 2006], [Özsarıvd., 2011]-[Özsarı, 2015] ve [Strauss ve Bu, 2001].

Yakın zamanda, [Cavalcanti vd., 2016] defocusing kübik Schrödinger denklemini $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ gibi sınırı düzgün sonlu bir bölgede, $N = 2, 3$ için, dinamik sınır koşulları ile çalışmıştır. [Cavalcanti vd., 2016]'nin düşündüğü model (1.1) modelinin, $\alpha = \beta = 1$ ve $\lambda = \kappa = \gamma = 0$ olduğu özel bir durumudur. Bu çalışmada, yazarlar lokal-düzgün (H^2) çözümlerin varlığı $N = 2, 3$ için ve global düzgün çözülerin varlığı $N = 2$ için kanıtlamıştır. Buna ek olarak, zayıf (H^1) çözümlerin varlığı $N = 2, 3$ için elde edilmiştir. Teklik kanıtlanmamıştır. Ayrıca, zayıf çözümlerin enerjisinin dinamik sınır koşulu üzerine koyulan uygun monotonluk koşulları altında düzgün şekilde sıfıra yakınsadığı gösterilmiştir.

[Cavalcanti vd., 2016]'deki ana fikir, verilen dinamik sınır koşulunu buna denk, ana denklemden u_t'yi Laplasyan ve diğer terimler cinsiden yazarak elde edilen sınır koşulu ile değiştirmekti. Bu teknik uygun bir topolojide yarıgrup üretebilmeyi mümkün kıldı. Laplasyan içeren bir sınır koşulu kullanmak ilk defa Venttsel'in çalışmalarında ortaya çıkmıştır[Ventcel′, 1959]. Venttsel, verilen bir eliptik operatörün kapanışını, düzgün kompakt bir bölgede tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde, pozitif daraltan operatörlerin sonsuzaz yarıgrup üreticisine kısıtlayabilen en genel sınır koşulununu bulmayı amaçlıyordu [Ventcel′, 1959]. Bu çalışmanın sonucu olarak Venttsel ("Wentzell" olarak da yazılır) sınır koşulu keşfedildi. Bahsettiğimiz özellikleri sağlayan bir Wentzell sınır koşulu şu şekilde yazılabilir: $\alpha\Delta u + b\frac{\partial u}{\partial \nu} + cu = 0$ Γ'da, $\alpha > 0, b, c \geq 0$.

Fiziksel olarak, bu sınır koşulu sınırın her bir noktasına etki eden sönümlü bir harmonik osilatör olarak düşünülebilir. Isı denkleminde, bunun anlamı verilen fiziksel duruma bağlı olarak sınırın bir ısı kaynağı ya da ısı çukuru olarak davranmasıdır. Bu sınır koşulları doğral olarak dalga denklemlerinde de ortaya çıkar. Özel olarak, Wentzell sınır koşulları akustik sınır koşullarının kapalı bir alt sınıfı olarak düşünülebilir. Isı denklemi için Wentzell problemlerinin iyi konulmuşluğu $X_p = L^p(\Omega) \cup L^p(\Gamma)$ şeklindeki uzaylarda gösterilmiştir. Örneğin [Favini vd., 2002]'in çalışmasında Wentzell problemi birbirine bağlı biri bölgenin içinde, diğeri sınırında iki kısmi diferansiyel denklem olarak düşünülüyor. Wentzell sınır koşulları ile ilgili, ısı ve dalga denklemleri kapsamında yayınlanmış şu çalışmalar da mevcuttur: [Cavalcanti vd., 2016]-[Cavalcanti vd., 2012] ve [Favini vd., 2002]-[Favini vd., 2000].

Biz bu çalışmada (1.1)'deki CGLE modeli için verilen üç temel problemi çalışmayı amaçlamaktayız: (i) iyi-konulmuşluk (ii) inviskit limit (iii) çözümlerin uzun zaman davranışı. Ancak, bu probleme dair bazı zorluklar mevcuttur:

(i) [Favini vd., 2002]'in ısı denkleminde uyguladığı yöntem bizim modelimizde $\alpha \neq 0$ olduğundan işe yaramıyor.

(ii) (1.1)'in doğrusal versiyonu L^2'de bir yarıgrup üretemiyor. $L^2(\Omega)$ (1.1) için doğal uzay olmadığından, [Okazawa ve Yokota, 2002]'nın çalışmasında kullanılan monoton operatör teorisi de işe yaramıyor çünkü $B\,u = |u|^p\,u$ operatörü sadece $L^2(\Omega)$'de m-akretif ama mesela $H^1(\Omega)$'de değil.

(iii) Çözümün $L^2(\Omega)$—normunu standard-olmayan sınır koşuluna bağlı olarak kontrol etmek mümkün görünmüyor. Bu doğrusal olmayan terimleri Gagliardo-Nirenberg tipindeki eşitsizliklerle kontrol etmeyi de zorlaştırıyor. Focusing tarzdaki problemler verilen data üzerinde küçüklük varsayımları bile yapılsa oldukça zorlaşıyor.

Yukarıda sayılan zorluklardan bazıları [Cavalcanti vd., 2016]'de sunulan yöntemle aşılabilir. Ancak, (1.1)'deki NLS'ye göre ek terimler buradaki analizi daha da zorlaştırıyor.

[Cavalcanti vd., 2016]'deki, kübik defocusing NLS'nin dinamik sınır koşulları altında çalışıldığı çalışmaya göre bizim çalışmamızda bazı temel farklılıklar ve iyileştirmeler söz konusudur.

(i) CGLE'nin çözümlerinin NLS'ye göre daha iyi bölge içi düzgünlüğe sahip olduğunu kanıtlıyoruz. Bu sonuç yarıgrup üreticisinin doğal düzgünleştirici etkisini destekliyor (Teorem 2.3, Eksonuç 2.1, Lemma 7.1 ve Teorem 2.7). Bu bahsedilen özellik, Schrödinger denkleminde eksik olan, evolüsyon operatörünün parabolik kısmı ile yakından ilgilidir.

(ii) Düzgün çözümlerin lokal varlığını [Cavalcanti vd., 2016]'den biraz farklı şekilde kanıtlıyoruz, çünkü orada kullanılan çözüm operatörü bizim modelimizde çözüm uzayının hiç bir kapalı yuvarında daraltan bir operatör olamıyor. Bizim yaklaşımımız $t = 0$ anında başlangıç datası u_0 ile uyumlu özel bir tam metrik uzay inşa etmeyi gerektiriyor (Lemma 6.2). Gösteriyoruz ki, çözüm operatörü bu tam metrik uzayı (daha doğrusu bu uzay içinden alınmış uygun bir kapalı yuvarı) kendi üzerine daraltan bir biçimde gönderiyor. Tanımladığımız metrik uzay, sabit nokta argümanında başlangıç datasının gerekli tüm uyuşma şartlarını sağlamasına olanak veriyor, bu da doğrusal homojen olmayan teoriyi kullanabilmemizi sağlıyor.

(iii) Defocusing NLS için çözümün $H^1(\Omega)$ normunu kontrol etmek kolay. CGLE'de ise enerji fonksiyoneli (bakınız (7.1) ve (7.2)) $\frac{1}{p+1}(\alpha\kappa+\beta\lambda)\|u\|_{L^{p+1}(\Gamma_1)}^{p+1}$, $\alpha\lambda\int_0^t \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$ ve $\int_0^t \|u(s)\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} ds$ gibi başka terimler de içeriyor. CGLE'nin çözümlerinin enerjisini kontrol edebilmek için frekans parametresinin işareti üzerinde bir varsayım yapmak durumunda kalıyoruz.

(iv) Bizim çalışmamızda evolüsyon operatörünün düzgünleştirici etkisi N ve p parametrelerinin daha geniş değerleri için global iyi-konulmuşluk problemlerini çözebilmemizi sağlıyor. CGLE'de $\lambda > 0$ olması doğrusal olmayan Schrödinger denklemine göre daha iyi kontrol kestirimleri elde etmemizi sağlıyor. [Cavalcanti vd., 2016] düzgün çözümlerin global iyi konulmuşluğunu sadece $N = 2$ ve $p = 3$ için kanıtlıyor. Biz CGLE kapsamında bu sonucu iyileştiriyoruz ve düzgün çözümlerin global iyi-konulmuşluk problemini $p \geq 2$ ve $N = 1$; $p \in [2, 5]$ ve $N = 2$; ve $p \in \left[2, \frac{11}{3}\right]$, $N = 3$ paremetre çiftleri için gösterebiliyoruz.

(v) Araştırmamızın en güzl sonuçlarından biri NLS için idbvp'nin çözümlerinin $(\lambda, \kappa) \to 0$ iken CGLE için idbvp'nin çözümlerinin inviskit limiti olarak elde edilebileceğinin kanıtlanmasıdır. Bu sonuç NLS için idbvp'yi çalışmak için bir başka yaklaşım getirmektedir. CGLE'nin çözümlerinin inviskit limitleri daha önceden bütün uzayda ya da periodik veya homojen sınır koşulları altında çalışılmıştı (bakınız [Bechouche ve Jüngel, 2000], [Ogawa ve Yokota, 2004] ve [Wu, 1998]). Biz bu özelliği çalışmamızda H^1-mertebesinde dinamik sınır koşulları altında doğruluyoruz. İnviskit limitleri kullanarak, $u \in L^\infty(0,T;V \equiv H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$ NLS için idbvp'nin zayıf çözümü olduğunda u_t için daha keskin düzgünlük sonuçları sunuyoruz. Daha kesin bir dille söyleyecek olursak, u_t'nin aslında homojen sınır koşullarında ortaya çıkan $L^\infty(0,T;V')$ yerine $L^2(0,T;V')$'ya ait olduğunu gösteriyoruz.

Araştırma raporunun geri kalanı kısaca şu şekilde işlenecektir:

(i) 2.Bölüm'de araştırmada kullandığımız notasyonlar, varsayımlar ve başlıca sonuçlar belirtilecektir.

(ii) 3. ve 4. Bölüm'de, doğrusal homojen ve doğrusal homojen-olmayan sistemlerin iyi-konulmuşluğunu inceleyeceğiz.

(iii) 5.Bölüm'de, doğrusal modelin Lipschitz perturbasyonlarını monotone sınır koşulları ile inceleyeceğiz.

(iv) 6.Bölüm'de, (1.1) için düzgün çözümlerin iyi konulmuşluğunu inceleyeceğiz.

(v) 7.Bölüm'de, global düzgün çözümleri çalışacağız.

(vi) 8.Bölüm'de, zayıf çözümlerin varlık ve tekliğini çalışacağız.

(vii) 9.Bölüm'de, NLS için idbvp'nin çözümlerinin CGLE için idbv'nin çözümlerinin inviskit limiti olduğunu kanıtlayacağız.

(viii) Son olarak 10.Bölüm'de, çözümlerin uzun zaman davranışlarını ve üssel manada enerjinin sıfıra yaklaşmasını inceleyeceğiz. Bunu kısmi diferansiyel denklemlerin kontrol teoresine ait bazı araçları kullanarak yapacağız.

2. **Gereç, Yöntem ve Bulgular**

$L^2(\Omega)$ uzayıdan olan Ω üzerinde tanımlı karmaşık fonksiyonlar için iç çarpım olarak

$$(y,z)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega y(x)\bar{z}(x)\,dx$$

alıyoruz ve bu iç çarpımdan ortaya çıkan şu normu düşünüyoruz:

$$||y||^2_{L^2(\Omega)} = (y,y)_{L^2(\Omega)}.$$

Ayrıca $H^1(\Omega)$ uzayını

$$(y,z)_{H^1(\Omega)} = (y,z)_{L^2(\Omega)} + (\nabla y, \nabla z)_{L^2(\Omega)}$$

iç çarpımı ile düşünüyoruz.

İleriki kısımlarda (1.1) problemi için doğal uzayın $L^2(\Omega)$ yerine

$$V = \left\{u \in H^1(\Omega);\, u = 0 \text{ on } \Gamma_0\right\} \tag{2.2}$$

olduğunu göreceğiz. V' uzayı V uzayının eşlek uzayını temsil edecek.

$\Gamma_0 \neq \emptyset$ olduğundan, Poincaré eşitsizliğine dayanarak, V uzayını aşağıdaki iç çarpımdan ortaya çıkan norm ile düşünebiliriz:

$$(y,z)_V = (\nabla y, \nabla z)_{L^2(\Omega)}, \; \forall y, z \in V. \tag{2.3}$$

Dolayısı ile, $\|y\|_V \equiv \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}$ normu $H^1(\Omega)$ uzayının normuna denktir.

Bu yazıda A operatörü Schrödinger ve ısı operatörlerinin toplamından oluşan Ginzburg-Landau operatörünü temsi edecektir. Yani,

$$A \equiv (\lambda + i\alpha)\Delta \tag{2.4}$$

ve bu operatörün tanım kümesi

$$D(A) \equiv \left\{y \in V, \Delta y \in V, \frac{\partial y}{\partial \nu} = -(\lambda + i\alpha)\Delta y \text{ on } \Gamma_1\right\}. \tag{2.5}$$

Yukarıdaki tanımda, $\Delta|_{\Gamma_1}$ Laplasyanın bölgenin içinden sınırına kısıtlanması olarak algılanmalıdır. Bu Sobolev iz teorisine göre iyi tanımlanmıştır çünkü $y \in D(A)$ olduğunda $\Delta y \in V$.

Bu çalışmada öncelikle (1.1)'e denk gelen doğrussal homojen modeli $g \equiv id$ olduğu durumda inceleyeceğiz:

$$\begin{cases} u_t = (\lambda + i\alpha)\,\Delta u & \Omega \times (0,\infty)\text{'da}, \\ u = 0 & \Gamma_0 \times (0,\infty)\text{'da}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -u_t & \Gamma_1 \times (0,\infty)\text{'da}, \\ u(0) = u_0 & \Omega\text{'da}. \end{cases} \tag{2.6}$$

(2.4)’de verilen A operatörü (2.6)’yı yeniden aşağıdaki Wentzell başlangıç-sınır değer problemi (ibvp) şeklinde yazmamıza olanak tanıyor:

$$(2.7)\qquad \begin{cases} u_t = (\lambda + i\alpha)\Delta u & \Omega \times (0,\infty)\text{'da,} \\ u = 0 & \Gamma_0 \times (0,\infty)\text{'da,} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -(\lambda + i\alpha)\Delta u & \Gamma_1 \times (0,\infty)\text{'da,} \\ u(0) = u_0 & \Omega\text{'da.} \end{cases}$$

Operatör teoretik anlamda, (2.7) şu şekilde de ifade edebiliriz

$$\dot{u} = Au, u(0) = u_0.$$

Yukarıdaki formülasyonu kullanarak (2.6) için aşağıdaki iyi konulmuşluk sonucunu ispatlıyoruz.

Teorem 2.1. *Doğrusal Homojen Problem I]* $(A, D(A))$ *operatörü* V *üzerinde daraltan güçlü sürekli bir yarıgrup üretir.*

(2.6) problemine geri dönersek, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2 (Doğrusal Homojen Problem II)**.** $u_0 \in V$ *olsun. O zaman* (2.6) *problemin* $u \in C([0,\infty); V)$ *olacak şekilde tek bir çözümü vardır.*

Doğrusal olmayan (1.1) problemini ele almak için, önce aşağıdaki homojen olmayan modeli çalışıyoruz:

$$(2.8)\qquad \begin{cases} u_t - (\lambda + i\alpha)\,\Delta u = f & \Omega \times (0,\infty)\text{'da,} \\ u = 0 & \Gamma_0 \times (0,\infty)\text{'da,} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -u_t & \Gamma_1 \times (0,\infty)\text{'da,} \\ u(0) = u_0 & \Omega\text{'da.} \end{cases}$$

Yukarıdaki idbvp’yi, doğrusal homojen modelde olduğu gibi, bir Wentzell ibvp olarak düşünüyoruz. Aslında, yukarıdaki problem aşağıdaki daha genel Wentzell problemin özel bir hali oluyor:

$$
\begin{cases}
u_t - (\lambda + i\alpha)\Delta u = f & \Omega \times (0,\infty)\text{'da,} \\
u = 0 & \Gamma_0 \times (0,\infty)\text{'da,} \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -(\lambda + i\alpha)\Delta u + g & \Gamma_1 \times (0,\infty)\text{'da} \\
u(0) = u_0 & \Omega\text{'da.}
\end{cases} \tag{2.9}
$$

Burada f ve g baştan verilen iki fonksiyondur.

(2.9)'deki problem için aşağıdaki sonucu elde ediyoruz.

Teorem 2.3 (Doğrusal Homojen Olmayan Problem I)**.** *$f \in L^1(0,\infty;V)$ ve $g \in L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1))$ olsun. O zaman her $u_0 \in V$ için (2.9)'in $u \in C([0,\infty);V)$ olacak şekilde tek bir çözümü vardır. Ayrıca, $\Delta u \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$ ve aşağıdaki "saklı" sınır düzgünlüğü doğrudur:*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(0,\infty, L^2(\Gamma_1)).$$

(2.9)'daki Wentzell ibvp formal olarak (2.8)'daki homojen olmayan idbvp ile $g \equiv -f|_{\Gamma_1}$ seçimi yapılarak özdeşleştirilebilir.

Eksonuç 2.1 (Doğrusal Homojen Olmayan Problem II)**.** *$f \in L^2(0,\infty;V)$ olsun. O zaman $u_0 \in V$ için (2.8) problemininin $u \in C([0,\infty);V)$ olacak şekilde tek bir çözümü vardır. Ayrıca, $u_t|_{\Gamma_1} \in L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1))$, $u_t \in L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$ ve $u \in L^2(0,\infty;H^2(\Omega))$.*

Not 2.1. (2.4)*'de verilen A operatörünün düzgünleştirici kısmından dolayı, burada elde edilen çözümler Schrödinger denkleminde elde edilen çözümlerden daha düzgündür (Teorem 2.3 ve Eksonuç 2.1'i [Cavalcanti vd., 2016, Theorem 1.4 and Corollary 1.5] ile karşılaştırın).*

Yukarıda oluşturduğumuz doğrusal teoriyi bölgenin içinde ve sınırında Lipschitz pertürbasyonlar olan ve sınırında dinamik sınır koşulu olan aşağıdaki duruma genelleyebiliriz:

$$
\begin{cases}
u_t = (\lambda + i\alpha)\Delta u + f(u) & \Omega \times (0,\infty)\text{'da,} \\
u = 0 & \Gamma_0 \times (0,\infty)\text{'da,} \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u_t) & \Gamma_0 \times (0,\infty)\text{'da,} \\
u(0) = u_0 & \Omega\text{'da.}
\end{cases} \tag{2.10}
$$

Burada, $g(z)$'nin aşağıdaki şartları sağladığını varsayacağız:

Varsayım 2.1. *Varsayalım ki $g(z)$ $\mathbb{C}$'de süreklidir ve hem $g(z)$ hem de ters görüntüsü olan $g^{-1}(z)$ şu şartları sağlar:*

(i) $Re[(g(z)-g(v))(\bar{z}-\bar{v})] \geq m|z-v|^2$,

(ii) $Im(g(z)\bar{z}) = 0$,

(iii) $|g(z)| \leq M|z|$

her $v, z \in \mathbb{C}$ *ve bazı* $m, M \in \mathbb{R}_+$.

Varsayım 2.1'de verilen türden fonksiyonlar literatürde dalga ve Schrödinger denklemleri için sıklıkla kullanılmıştır (bakınız [Lasiecka ve Tataru, 1993]). Özel olarak, Varsayım (i) ve (iii) dalga denklemleri ile ilgili çalışmalarda çokça kullanılan varsayımın karmaşık analoğu olarak düşünülebilir.

(2.10)'daki modeli düşündüğümüzde, $f : V \to V$ Lipschitz sürekli olduğunu düşüneceğiz, yani bir L sabiti vardır ve $u, v \in V$ olduğunda,

$$\|f(u)-f(v)\|_V \leq L\|u-v\|_V. \tag{2.11}$$

(2.10)'un iyi-konulmuşluğunu daha genel bir Wentzell ibvp'yi çalışarak elde ediyoruz. Yani, sınırda $g(u_t)$'yi $g((\lambda + i\alpha)\Delta u + h(u) + \gamma u)$ ile değiştiriyoruz, burada $h : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma_1)$ Lipschitz, yani bir $K > 0$ sabiti için

$$\|h(u)-h(v)\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq K\|u-v\|_V. \tag{2.12}$$

İz operatörü $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ sürekli ve doğrusal olduğundan, bu formulasyon aslında (2.10)'u genelliyor, çünkü (2.10) $h(u) = \gamma_0(f(y))$ olduğu zamanki özel durum haline geliyor. Problemi yeniden soyut operatör teoretik forma yazmak için, A_f operatörünü

$$A_f u = (\lambda + i\alpha)\Delta u + f(u), \tag{2.13}$$

tanım kümesi

$$D(A_f) = \left\{ y \in V, \Delta y \in V, \frac{\partial y}{\partial \nu} = -g((\lambda + i\alpha)\Delta|_{\Gamma_1} y + h(y)) \text{ on } \Gamma_1 \right\} \tag{2.14}$$

olacak şekilde tanımlıyoruz. Burada g'nin Varsayım 2.1'deki özellikleri, f ve h'ın (2.11) (2.12)'daki özellikleri sağladığını varsayıyoruz. Burada dikkat etmek gerekir ki f (2.11)'i sağlıyorsa, $h \equiv \gamma_0 f$ da (2.12)'u Sobolev iz teorisine göre sağlamak durumunda kalacaktır.

Aşağıdaki ii konulmuşluk sonucu doğrudur.

Teorem 2.4 (Doğrusal-olmayan Pertürbasyonlar I)**.** *Varsayım 2.1 , (2.11) ve (2.12)'yi göz önünde bulundurursak, $(A_f, D(A_f))$ operatörü V üzerinde güçlü sürekli bir yarıgrup üretir.*

(2.10)'a geri gidersek, şunu elde ederiz:

Eksonuç 2.2 (Doğrusal-olmayan Pertürbasyonlar II)**.** *Teorem 2.4'deki aynı varsayımlar altında, her $u_0 \in V$ için (2.10) probleminin $u \in C([0,\infty), V)$ olacak şekilde tek bir çözümü vardır.*

Son olarak (1.1) modelini $g \equiv id$ olduğu durumda kuvvet tipindeki doğrusal olmayan terimlerle çalışıyoruz, yani

$$
\begin{cases}
u_t - (\lambda + i\alpha)\Delta u + (\kappa + i\beta)|u|^{p-1}u - \gamma u = 0 & \Omega \times \mathbb{R}_+\text{'da}, \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -u_t & \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+\text{'da}, \\
u = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+\text{'da}, \\
u(0) = u_0 & \Omega\text{'da}.
\end{cases} \tag{2.15}
$$

Amacımıza ulaşmak için, homojen olmayan doğrusal teoride elde ettiğimiz sonuçları $F(u) = -(\kappa + i\beta)|u|^{p-1}u + \gamma u$ gibi bir forcing terimi ile yeniden ele alıyoruz. Sabit nokta yaklaşımını ve bazı önsel kestirimleri kullanarak, aşağıdaki lokal iyi konulmuşluk sonucunu ispatlıyoruz:

Teorem 2.5 (Lokal Düzgün Çözümler)**.** *$N \leq 3$ ve $\beta > 0$ olsun. O zaman, her sınırlı $B \subset X_0$ için, bir $T > 0$ vardır ve her $(u_0, w_0) \in B$ için, (2.15) probleminin tek bir u çözümü vardır öyleki $(u, w = u_t) \in X_T$.*

X_0 ve X_T uzayları 6. Bölüm'de tanımlanıyor. $w = u_t$ ise, $(u, w) \in X_T$ ifadesini şu şekilde de yazabiliriz.

$$
u \in C\left([0,T]; H^2(\Omega) \cap V\right) \cap C^1([0,T]; V). \tag{2.16}
$$

Global iyi-konulmuşluk için ise aşağıdaki sonucu elde ediyoruz:

Teorem 2.6 (Global Düzgün Çözümler)**.** *$(u, u_t) \in X_T$ Teorem 2.5'deki gibi bir lokal çözüm olsun ve $\beta > 0$ alalım. O zaman, bu çözüm aşağıdaki şartlar altında globaldir: $p \geq 2$ eğer $N = 1$ ise; $p \in [2, 5]$ eğer $N = 2$ ise; $p \in \left[2, \frac{11}{3}\right]$ eğer $N = 3$ ise.*

u_0 üzerindeki düzgünlükten biraz ödün verirsek, H^1-mertebesinde zamanda sürekli çözümler elde edebiliriz. Bunun için önce zayıf çözüm kavramını tanımlıyoruz.

Tanım 2.1 (Zayıf Çözüm Kavramı)**.**

$$u_0 \in Q \equiv \{\varphi \in V \text{ öyle ki } \gamma_0\varphi \in L^{p+1}(\Gamma_1)\}$$

olsun. Verilen her $T > 0$ için, bir u fonksiyonu $u|_{t=0} = u_0$ sağlıyor ise; ve başlangıç dataları $u_{\mu,0}$ ile gösterilen, Q'da $u_{\mu,0} \to u_0$ şartını sağlayan bir global düzgün çözüm dizisi u_μ varsa ve bu dizi $C([0, T], V) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$'da $u_\mu \to u$, $L^2(0, T; L^2(\Omega))$'da $u'_\mu \to u'$, ve $L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$'da $\gamma_0 u'_\mu \to \gamma_0 u'$ sağlıyor ise, o zaman u'ya (2.15) *probleminin zayıf çözümü diyeceğiz.*

Bir sonraki sonucumuz zayıf çözümlerin varlık ve tekliği ile ilgili aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 2.7 (Zayıf Çözümler)**.** *$N \leq 3$, $\beta > 0$, $u_0 \in V$, $\gamma_0 u_0 \in L^{p+1}(\Gamma_1)$ olsun ve (p, N) Teorem 2.6'daki şartları sağlasın. O zaman* (2.15) *Tanım* (2.1)*'de verilen manada tek bir zayıf çözüme sahiptir.*

Not 2.2. *Teorem* (2.7) *[Cavalcanti vd., 2016]'de çalışılan Schrödinger probleminden daha düzgün çözümler vermektedir. Schrödinger probleminde sadece $u \in L^\infty(0, T; V)$ ve $u' \in L^2(0, T; V')$ olduğu gösteriliyor. Ayrıca, NLS'de teklik sadece doğrusal olmayan terimin V'de global Lipschitz olduğu durumda gösterilebilmiştir, ancak CGLE'de, tekliği daha genel bir kapsamda kanıtlayabiliyoruz. Bundaki en büyük etken Ginzburg-Landau operatörünün düzgünleştirici etkisidir.*

Bu noktada, sorulacak en doğal problemlerden biri CGLE'nin dinamik sınır koşulları altında çözümlerinin NLS'nin aynı sınır koşulları altındaki çözümlerine $\epsilon \equiv (\lambda, \kappa) \to 0$ olduğu durumda yaklaşıp yaklaşmadığıdır. Bunun gerçekten aşağıdaki teorem ile doğru olduğunu kanıtlıyoruz.

Teorem 2.8 (Inviscit Limit I)**.** *Diyelim ki u_ϵ, $\epsilon = (\lambda, \kappa)$ için, CGLE idbvp'nin $u_0 \in Q$ başlangıç koşuluna sahip Theorem 2.7'deki gibi global bir zayıf çözümüdür. O zaman,* *öyle bir $u \in L^\infty(0,T;V)$ vardır ki $u_t \in L^2(0,T;V')$ ve u_ϵ'nun bir alt dizisi (hala aynı şekilde yazılan) aşağıdaki özellikleri sağlar:*

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \ L^\infty(0,T;V)\text{'de zayıf-*}, \tag{2.17}$$

$$\partial_t u_\epsilon \rightharpoonup u_t \ L^2(0,T;V')\text{'de zayıf} \tag{2.18}$$

$\epsilon \to 0$ *olduğunda, ve en önemlisi u NLS idbvp'yi zayıf anlamda çözer.*

Teorem 2.9 (Inviscit Limit II)**.** *$N = 2$ ve $p = 3$ olsun. Varsayalım ki u_ϵ CGLE idbvp'nin u_ϵ^0 başlangıç datasına sahip çözümüdür ve u NLS idbvp'nin u_0 başlangıç datasına sahip çözümüdür öyle ki $\epsilon = (\lambda,\kappa) \to 0$ iken $u_\epsilon^0 \to u_0$ V'de. O zaman, $\epsilon = (\lambda,\kappa) \to 0$ iken,*

$$\|u_\epsilon - u\|_V = O(\lambda) + O(\kappa).$$

Son olarak, CGLE idbvp'nin çözümlerinin $\gamma \le 0$ olduğunda sıfıra üssel hızda azaldığını gösteriyoruz. Bu $\gamma < 0$ için çok daha kolay ve aşağıdaki sonuca sahibiz.

Teorem 2.10 (Kararlılaştırma I)**.**

$$u_0 \in Q \equiv \{\varphi \in V \cap L^{p+1}(\Omega) \text{ such that } \gamma_0\varphi \in L^{p+1}(\Gamma_1)\}$$

olsun ve u CGLE idbvp'nin $\gamma < 0$ için Theorem 2.7'deki gibi bu başlangıç datasına karşılık gelen çözümü olsun. O zaman,

$$F(t) \le E_0 e^{-|\gamma| t} \quad (t \ge 0).$$

Burada,

$$F(t) \equiv \frac{\alpha}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{p+1}\|u(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}. \tag{2.19}$$

ve

$$E_0 \equiv \frac{\alpha}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{p+1}\|u_0\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} - \frac{\alpha\gamma}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{1}{p+1}(\alpha\kappa + \beta\lambda)\|u_0\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Gamma_1)}. \tag{2.20}$$

Not 2.3. *Kararlılaştırma problemi $\gamma = 0$ olduğunda daha zor ve kontrol teorik bazı araçların kullanımını gerektiriyor. $\gamma = 0$ olduğunda, normalde CGLE için L^2-mertebesinde bile azalış söz konusu değil. Ancak, bizim modelimizde varolan dinamik sınır koşulu* *kararlılaştırıcı bir kontrol etkisi gösteriyor ve çözümlerin enerjisinin üssel manada sıfıra yaklaşması mümkün oluyor. Aslında, aşağıdaki teoremi ispat edebiliyoruz.*

Teorem 2.11 (Kararlılaştırma II)**.**

$$u_0 \in Q \equiv \{\varphi \in V \cap L^{p+1}(\Omega) \text{ such that } \gamma_0\varphi \in L^{p+1}(\Gamma_1)\}$$

ve u bu dataya karşılık gelen CGLE idbvp'nin (denklem 2.15) $\gamma = 0$ olduğu durumda Teorem 2.7'deki gibi bir çözümü olsun. Ayrıca, varsayalım ki Ω şu geometrik şartı sağlıyor: öyle bir $x_0 \in \mathbb{R}^N$ vardır ki Γ_0'da $(x - x_0)\cdot\nu \le 0$ ve Γ_1'de $(x - x_0)\cdot\nu > 0$. O zaman, bir $C > 0$ sabiti için

$$F(t) \le F(0)e^{1-\frac{t}{C}} \quad (t \ge 0).$$

Burada $F(t)$ (2.19)'de verildiği gibidir.

3. **Doğrusal Homojen Problem**

Bu bölümde amacımız Teorem 2.1 ve 2.2'ü kanıtlayacağız. Bunu başarmak için, (2.6)'de verilen idbvp'yi (2.7)'de verilen Wentzell ibvp'ye çevireceğiz. Bunun için A operatörünün maksimal disipatif olduğunu göstermek gerekiyor.

A**'nın disipatif olması:**

Buradaki zorluk elimizdeki operatörün en doğal uzay olan $L^2(\Omega)$'da disipatif olmamasıdır. Aslında, A operatörünün (2.4)'de verilen tanımından $u \in D(A)$ için:

$$\begin{aligned}(Au, u)_{L^2(\Omega)} &= (\lambda + i\alpha)(\Delta u, u)_{L^2(\Omega)} \\ &= -(\lambda + i\alpha)(\nabla u, \nabla u)_{L^2(\Omega)} + (\lambda + i\alpha)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right)_{L^2(\Gamma_1)}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Γ_1 üzerinde $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -(\lambda + i\alpha)\,\Delta u$ olduğundan (bakınız (2.7)),

$$\mathrm{Re}(Au, u)_{L^2(\Omega)} = -\lambda\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \mathrm{Re}[\,(\lambda + i\alpha)^2\,(\Delta u, u)_{L^2(\Gamma_1)}] \tag{3.2}$$

elde ediyoruz. Maalesef, yukarıdaki eşitsizlikten $\mathrm{Re}(Au, u)_{L^2(\Omega)} \le 0$ olduğu sonucuna varamayız. Bu yüzden, A $L^2(\Omega)$'da disipatiftir diyemeyiz. Bu durum daha önceden [Favini vd., 2002]'de verilen problemi H^1 topolojisinde ele alma fikrini aklımıza getiriyor.

O zaman şimdi, aynı hesaplamayı V uzayının iç çarpımına göre yapalım. Yani, her $u \in D(A)$ için,

$$
\begin{aligned}
(Au,u)_V &= (\nabla Au, \nabla u)_{L^2(\Omega)} \\
&= (\lambda + i\alpha)(\nabla\Delta u, \nabla u)_{L^2(\Omega)} \\
&= -(\lambda + i\alpha)(\Delta u, \Delta u)_{L^2(\Omega)} + (\lambda + i\alpha)\left(\Delta u, \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)},
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

ki burada Γ_1'de $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -(\lambda + i\alpha)\Delta u$ olduğunu kullanırsak, şunu elde ederiz:

$$
(Au,u)_V = -(\lambda + i\alpha)\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} - \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}. \tag{3.4}
$$

(3.4)'de reel kısımları alırsak ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanırsak,

$$
\mathrm{Re}(Au,u)_V = -\lambda\,\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} - \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq 0 \tag{3.5}
$$

elde ederiz.

Bu A operatörünün disipatif olduğunu kanıtlıyor.

A **operatörünün maksimal olması:** Öyle bir bilineer form tanımlamak istiyoruz ki

$$
a(u,z) = (-Au + \theta u, z)_V \tag{3.6}
$$

eşitliği $u \in D(A)$ ve $z \in V$ olduğunda doğru olsun. Burada θ daha sonra belirlenecek. Bu şekildeki bir bilineer form A operatörünün tanımını göz önüne aldığımızda ve kısmi integrasyon yaptığımızda

$$
a(u,z) \equiv (\lambda + i\alpha)(\Delta u, \Delta z)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial z}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} + \theta(\nabla u, \nabla z)_{L^2(\Omega)} \tag{3.7}
$$

şeklinde ortaya çıkıyor.

Şimdi,

$$
Z = \left\{ z \in V, \Delta z \in L^2(\Omega), \frac{\partial z}{\partial \nu} \in L^2(\Gamma_1) \right\}, \tag{3.8}
$$

uzayını aşağıdaki norm ile düşğnğyoruz:

$$
\|z\|^2_Z = \|z\|^2_V + \|\Delta z\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}. \tag{3.9}
$$

Z aslında bir Banach uzayıdır (bakınız [Cavalcanti vd., 2016, Lemma 2.1]). Yukarıda (3.7)'deki bilineer formu bu Banach uzayı üzerinde düşünüyoruz.

Bir sonraki adım Browder-Minty teoremini [Brezis, 2011, Theorem 5.16] her $f \in V$ için, tek bir zayıf $u \in V$ çözümü olduğunu ve bu çözümün aşağıdaki varyasyonel formu sağladığını göstermek için kullanıyoruz

$$a(u,z) = (-f,z)_V, \forall z \in V.$$

Bu $a(u,z)$'nin sürekli ve Z üzerinde koersif olduğunu göstermekle mümkündür. Öncelikle, görüyoruz ki

$$\begin{aligned} a(u,z) &= -(\lambda + i\alpha)(\Delta u, z)_V + \theta(u,z)_V \\ &= (\lambda+i\alpha)(\Delta u, \Delta z)_{L^2(\Omega)} - (\lambda+i\alpha)\left(\Delta u, \frac{\partial z}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} + \theta(u,z)_V. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Şimdi, Γ_1 üzerinde $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -(\lambda + i\alpha)\Delta u$ olduğundan (3.10) şu şekilde ifade edilebilir:

$$a(u,z) = (\lambda+i\alpha)(\Delta u, \Delta z)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial z}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} + \theta(u,z)_V, \tag{3.11}$$

dolayısı ile

$$|a(u,z)| \leq C(\lambda,\alpha)\left|(\Delta u, \Delta z)_{L^2(\Omega)}\right| + \left|\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial z}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)}\right| + |\theta|\,|(u,z)_V|. \tag{3.12}$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini yukarıdaki iç çarpımlara uygularsak,

$$|a(u,z)| \leq C(\alpha,\lambda,\theta)\|u\|_Z\|z\|_Z \tag{3.13}$$

elde ederiz, bu $a(u,z)$'nin sürekli olduğunu gösteriyor.

$a(u,z)$'nin koersif olduğunu göstermek için, (3.11)'de $z = u$ yazıyoruz. Buradan çıkıyor ki

$$|a(u,u)| = \left|\theta\|u\|_V^2 + (\lambda+i\alpha)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2\right|. \tag{3.14}$$

Öte yandan,

$$\operatorname{Re} a(u,u) = \operatorname{Re}(\theta)\,\|u\|_V^2 + \lambda\,\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2,$$

$$\operatorname{Im} a(u,u) = \operatorname{Im}(\theta)\,\|u\|_V^2 + \alpha\,\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Şimdi, aşağıdaki cebirsel eşitsizlikten faydalanırsak

$$\sqrt{2}\,|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

$$(3.15)\qquad \begin{aligned} |a(u,u)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\Bigg(&\left|\operatorname{Re}(\theta)\,\|u\|_V^2 + \lambda\,\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2\right| \\ &+ \left|\operatorname{Im}(\theta)\,\|u\|_V^2 + \alpha\,\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\right|\Bigg) \end{aligned}$$

olduğu ortaya çıkıyor. Şimdi, $|a+b| \leq |a| + |b|$ üçgen eşitsizliğinde

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re}(\theta)\,\|u\|_V^2 + \lambda\,\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2, \\ b &= \operatorname{Im}(\theta)\,\|u\|_V^2 + \alpha\,\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

alır ve $\operatorname{Im}(\theta) \geq 0$ seçersek, (3.15)'dan, şunu elde ederiz:

$$(3.16)\qquad \begin{aligned} |a(u,u)| &\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left|(\operatorname{Re}(\theta) + \underbrace{\operatorname{Im}(\theta)}_{\geq 0})\|u\|_V^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + (\lambda+\alpha)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\right| \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{Re}(\theta)\|u\|_V^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + (\lambda+\alpha)\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\right). \end{aligned}$$

Şimdi $\operatorname{Re}(\theta) > 0$ seçersek A'nın koersif olduğu ortaya çıkar.

Browder-Minty teoreminin karmaşık versiyonundan her $f \in Z'$ (Z' uzayı Z'nin duali) için, bir $v \in Z$ için $a(v,z) = (-f,z)_V$ eşitliğinin sağlandığı sonucuna varıyoruz. Ayrıca, $D(A) \subset Z \subset V \subset Z'$; dolayısı ile her $f \in V$ için $v \in Z \subset V$ olacak şekilde bir çözüm vardır. Varyasyonel formu $\frac{\partial z}{\partial \nu} = 0$ özelliğini sağlayan $z \in Z$ ile test edersek, ortaya çıkar ki

$$(\lambda + i\alpha)(\Delta v, \Delta z)_{L^2(\Omega)} - \theta(v, \Delta z)_{L^2(\Omega)} = (f, \Delta z)_{L^2(\Omega)},$$

ki bu durumda

$$(\lambda + i\alpha)\Delta v - \theta v = f.$$

$v, f \in V$ olduğundan, $\Delta v \in V$ çıkar. Varyasyonel formu bir kez daha kullanarak, sınır koşulunun sağlandığı ve $v \in D(A)$ olduğunu görürürüz. Bu bize A operatörünün V üzerinde bir C_0-tipinde yarıgrup ürettiğini gösterir.

Daha da fazlası, $\Delta v \in V$ olması $\Delta v|_{\Gamma_1} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ olduğunu gösterir ve bu yüzden $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$. İz teorisinden $v \in H^2(\Omega)$ elde ederiz; yani $D(A)$'nın düzgünlüğü en az $H^2(\Omega)$ mertebesindedir. $D(A)$ V'de yoğun olduğundan, Lummer – Philips teoremini ya da [Showalter, 1997, Eksonuç IV.3.2,] kullanırsak, Teorem 2.1 kanıtlanmış olur. Wentzell ibvp (2.7)'yi (2.6)'de verilen idbvp'ye çevirirsek, Teorem 2.2 de kanıtlamış oluyoruz.

4. **Homojen-olmayan Doğrusal Problem**

Bu bölümde, amacımız Teorem 2.3 ve Eksonuç 2.1'i ispat etmektir. Şimdi (2.8) problemini düşünüyoruz. Öncelikle, [Showalter, 1997, Teorem IV.4.1A]'e göre, aşağıdaki sonucu çıkartabiliriz:

Önerme 4.1. *$f \in L^1(0,\infty;V)$ ve $u_0 \in \overline{D(A)} = V$ olduğunda,* (2.8) *probleminin $u \in C([0,\infty);V)$ olacak şekilde tek bir genelleşmiş çözümü vardır.*

Şimdi, (2.9)'da verilen genellenmiş Wentzell ibvp'yi düşünüyoruz. Öncelikle, $f = 0$ durumunu düşünelim ve (2.9) probleminin iyi-konulmuşluğunu elde etmek için süperpozisyon prensibini kullanalım. İlk önce, aşağıda bir Neumann fonksiyonu $\mathcal{N}$ tanımlıyoruz: verilen $g \in H^s(\Gamma_1)$ için, $\mathcal{N}g$ şu problemi çözüyor

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \Delta \mathcal{N}g = 0 & \\ \dfrac{\partial \mathcal{N}g}{\partial \nu} = g & \text{on } \Gamma_1 \\ \mathcal{N}g = 0 & \text{on } \Gamma_0. \end{cases}$$

Eliptik teoriyi kullanarak [Lions ve Magenes, 1968], biliyoruz ki

$$(4.2)\qquad \mathcal{N} : H^s(\Gamma_1) \to H^{s+3/2}(\Omega) \quad \text{her } s \in \mathbb{R} \text{ için süreklidir.}$$

$\tilde{u} = u - \mathcal{N}g$ olarak tanımlıyoruz. Γ_1 üzerinde (2.9)'da verilen sınır koşulunu kullanırsak, Γ_1 üzerinde $\Delta\mathcal{N}g = 0$ ve $\dfrac{\partial \mathcal{N}g}{\partial \nu} = g$ elde ederiz ki buradan

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} &= \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathcal{N}g}{\partial \nu} \\ &= \cancel{g} - (\lambda + i\alpha)\Delta u - \cancel{g} \\ &= -(\lambda + i\alpha)\Delta u + (\lambda + i\alpha)\underbrace{\Delta \mathcal{N}g}_{=0} \\ &= -(\lambda + i\alpha)\Delta[u - \mathcal{N}g] \\ &= -(\lambda + i\alpha)\Delta\tilde{u}, \quad \Gamma_1\text{'de.} \end{aligned}$$

Ayrıca $f=0$ durumunu düşündüğümüzden görüyoruz ki

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t =& u_t - \mathcal{N} g_t \\ =& (\lambda + i\alpha)\,\Delta u - \mathcal{N} g_t.\end{aligned}$$

$\Delta \mathcal{N} g = 0$ olduğunu tekrar kullanırsak

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t =& (\lambda + i\alpha)\,\Delta(u - \mathcal{N} g) - \mathcal{N} g_t \\ =& (\lambda + i\alpha)\,\Delta \tilde{u} - \mathcal{N} g_t.\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.3) ve (4.4)'ü birleştirirsek, $\tilde{u}$'ya göre yazılmış problem aşağıdakine dönüşüyor:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = (\lambda + i\alpha)\,\Delta \tilde{u} - \mathcal{N} g_t & \Omega \times (0,\infty)\text{'da} \\ \tilde{u} = 0 & \Gamma_0 \times (0,\infty)\text{'da} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = -(\lambda + i\alpha)\,\Delta \tilde{u} & \Gamma_1 \times (0,\infty)\text{'da} \\ \tilde{u}(0) = u_0 - \mathcal{N} g(0). \end{cases} \tag{4.5}$$

Yukarıdaki problem için aşağıdaki sonucu elde ediyoruz:

Lemma 4.1. *$g \in W^{1,1}(0,\infty; H^{-1/2}(\Gamma_1))$ ise, o zaman (2.9) problemi için $u \in C([0,\infty); V)$ olacak şekilde tek bir çözüm vardır.*

Kanıt. Aslında, eğer $g \in W^{1,1}(0,\infty; H^{-1/2}(\Gamma_1))$ ise, o zaman $g_t \in L^1(0,\infty; H^{-1/2}(\Gamma_1))$ ve $g(0) \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$. Bunları kullanarak ve (4.2)'de verilen Neumann fonksiyonun $H^{-1/2}(\Gamma_1)$'den $H^1(\Omega)$'e sürekli olmasından dolayı,

$$\begin{cases} -\mathcal{N} g_t \in L^1(0,\infty; V) \\ \mathcal{N} g(0) \in V. \end{cases} \tag{4.6}$$

Önerme 4.1'i kullanarak (4.5)'in iyi konulmuşluğunu elde ederiz ve $\tilde{u} \in C([0,\infty); V)$ olur. $u = \tilde{u} + \mathcal{N} g$ yazarsak ve $\tilde{u}$, $\mathcal{N} g \in C([0,\infty); V)$ olduğunu kullanırsak, söyleyebiliriz ki (2.9) probleminin $u \in C([0,\infty); V)$ olacak şekilde tek bir çözümü vardır. □

Aşağıda Teorem 2.3'ü kanıtlayacağız. Bu sonuç sadece $g \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_1))$ olmasını gerektiriyor. Aslında, Lemma 4.1 bize (2.9) probleminin $g \in W^{1,1}(0,T; H^{-1/2}(\Gamma_1))$ olduğunda $u \in C([0,T]; V)$ olacak şekilde tek bir çözümü olduğunu söylüyor. Öyleyse $g \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_1))$ olduğu durumda $\sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_V < \infty$ olduğunu göstermek ve sonra yoğunlu argümanı kullanmak yeterlidir.

(2.9)'u $\bar{u}$ ile V'de çarpıp, t'ye göre integre edersek

$$\int_0^t (u_t(s), u(s))_V\, ds - \int_0^t ((\lambda + i\alpha)\Delta u(s), u(s))_V\, ds = \int_0^t (f(s), u)_V\, ds \tag{4.7}$$

elde ederiz. Genelliği bozmadan $f=0$ alalım. $f\neq 0$ olan durum daha sonra süperpozisyon yöntemi ile çözülebilir. Yukarıda ilk terimi

$$\mathrm{Re}\int_0^t (u_t(s),u(s))_V\,ds=\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|u(s)\|_V^2\,ds=\frac{1}{2}\|u(t)\|_V^2-\frac{1}{2}\|u(0)\|_V^2 \tag{4.8}$$

olarak yazabiliriz. (4.7)'in sol tarafındaki ikinci terim üstünde kısmi integrasyon yaparsak

$$\begin{aligned}&\int_0^t ((\lambda+i\alpha)\Delta u(s),u(s))_V\,ds\\ &=\int_0^t\left[-(\lambda+i\alpha)\|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2+(\lambda+i\alpha)\left(\Delta u(s),\frac{\partial u}{\partial\nu}(s)\right)_{L^2(\Gamma_1)}\right]ds\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde ederiz. Şimdi, Γ_1 üzerindeki sınır koşulundan, yani, $(\lambda+i\alpha)\,\Delta u=g-\dfrac{\partial u}{\partial\nu}$ olduğundan

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left((\lambda+i\alpha)\Delta u(s),\frac{\partial u}{\partial\nu}(s)\right)_{L^2(\Gamma_1)}ds\\ &=\int_0^t\left[-\left\|\frac{\partial u}{\partial\nu}(s)\right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2+\left(g,\frac{\partial u}{\partial\nu}(s)\right)_{L^2(\Gamma_1)}\right]ds\end{aligned} \tag{4.10}$$

olur. (4.8) – (4.10)'u (4.7)'de yazarsak ve reel kısımları alırsak, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}0=&\frac{1}{2}\|u(t)\|_V^2-\frac{1}{2}\|u(0)\|_V^2+\lambda\int_0^t\|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\,ds+\int_0^t\left\|\frac{\partial u}{\partial\nu}(s)\right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2ds\\ &-\mathrm{Re}\int_0^t\left(g,\frac{\partial u}{\partial\nu}(s)\right)_{L^2(\Gamma_1)}ds.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Yani, $\eta>\frac{1}{4}$ seçersek

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u(t)\|_V^2+\lambda\int_0^t\|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\,ds+\left(1-\frac{1}{4\eta}\right)\int_0^t\left\|\frac{\partial u}{\partial\nu}(s)\right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2ds\\ &\leq\frac{1}{2}\|u(0)\|_V^2+\eta\int_0^t\|g\|_{L^2(\Gamma_1)}^2\,ds\end{aligned} \tag{4.12}$$

olur.

Daha genel olarak, $f\in L^1(0,T;V)$ için,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\|u(t)\|_V^2+\lambda\int_0^t\|\Delta u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\,ds+\left(1-\frac{1}{4\eta}\right)\int_0^t\left\|\frac{\partial u}{\partial\nu}(s)\right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2ds\\ &\leq\frac{1}{2}\|u(0)\|_V^2+\eta\int_0^t\|g\|_{L^2(\Gamma_1)}^2\,ds+\int_0^t\|f\|_V^2\,ds\\ &\leq C(u_0,f,g)\end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitsizliği doğrudur.

$g = f|_{\Gamma_1}$ seçersek, (2.9) problemi (2.8) ile özdeşleştirilebilir. Dikkat etmek gerekir ki $f \in L^2(0,T;V)$ ise, iz teorisine göre $g \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_1))$. Ayrıca, $\Delta u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ ve $f \in L^2(0,T;V)$ olduğundan $u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ el ederiz ve böylece Eksonuç 2.1'in ispatını tamamlamış oluyoruz.

Not 4.1. *(i)* *$u \in H^1(\Omega)$ ise, iz teorisine göre, formal olarak $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ elde ederiz. Bu yüzden Teorem 2.3'de ortaya çıkan $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(\Gamma_1)$ düzgünlüğü, altta yatan Wentzell yapısına bağlı saklı bir düzgünlüktür.*

(ii) *Yine, sadece formal bir argümanla, $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ olması beklenir. $\Delta u \in L^2(\Omega)$, olması Ginzburg-Landau operatörünün parabolik kısmının düzgünleştirici etkisine bağlı olarak ortaya çıkmaktadır.*

(iii) *Eksonuç 2.1'den, ayrıca*

$$(f, u_0) \longmapsto u \tag{4.14}$$

operatörünün $L^2(0,\infty,V) \times V$'den $C([0,\infty);V)$'ye sınırlı olduğu da ortaya çıkıyor.

(2.9)'den elde edilen bir problem için bir Duhamel formüşü elde etmek olacaktır. Asıl amacımı u_t için belli kestirimler elde etmektir. Bu yönde, u için bir yarıgrup gösterimi elde etmeye çalışacağız.

Lemma 4.2. *u_0, f ve g aşağıdaki özellikleri sağlasın*

(i) $u_0 \in V$

(ii) $f \in L^1(0,T;V)$

(iii) $g \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$.

O zaman, (2.9)*'ın $u \in C([0,T];V)$ çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir*

$$u(t) = e^{At}u_0 - A\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \tag{4.15}$$

Kanıt. Duhamel formülünden, (4.5)'in çözümü şu şekilde yazılır:

$$\tilde{u}(t) = e^{At}\tilde{u}(0) - \int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g_t(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds.$$

Yukarıdaki eşitlik $[D(A)]'$'de düşünülmelidir. Kısmi integrasyon sonucu

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) &= e^{At}\tilde{u}(0) - e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)\Big|_0^t - A\int_0^t e^{A(t-s)}\widehat{\mathcal{N}}g(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds \\ &= e^{At}\tilde{u}(0) - \mathcal{N}g(t) + e^{At}\mathcal{N}g(0) - A\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde ederiz. $\tilde{u} = u - \mathcal{N}g$ olduğundan, (4.15)'da verilen gösterimi bulmuş oluruz.

Varsayım (i) ve (ii)'den, (4.15)'in ilk ve üçüncü terimleri $C([0,T];V)$'ye aittir. $u \in C([0,T];V)$ olduğunu kanıtlamak için, $A\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)ds \in C([0,T];V)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Aslında, varsayım (iii) ile (4.2)'i $s=0$ için birleştirirsek, $\mathcal{N}g \in L^2(0,T,V)$ çıkar. Sonuç olarak, [Pazy, 1983, Teorem 2.4(b), pg.5]'den, $\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)\,ds \in D(A)$ olduğunu biliyoruz ki bu bize $A\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)\,ds$'ın anlamlı olduğunu söylüyor. □

Teorem 2.3'ün kanıtından aşağıdaki fonksiyonun sürekli olduğu da ortaya çıkıyor:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) &\to C([0,T];V) \\ g \quad &\mapsto A\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)ds. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Aşağıda, homojen olmayan (2.9) problemi için daha düzgün çözümleri inceleyeceğiz. Öncelikle şu sonuca bakalım:

Teorem 4.1. *Lemma 4.2'de verilen varsayımlara ek olarak varsayalım ki:*

(i) $f_t \in L^1(0,T;V)$

(ii) $g_t \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$

(iii) $\Delta u_0 \in V$ *ve*

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - g(0) = -(\lambda + i\alpha)\Delta u_0.$$

O zaman, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|u_t\|_{C([0,T];V)} \le C\Big[\|f\|_{W^{1,1}(0,T;V)} + \|g\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \|\Delta u_0\|_V + \|u_0\|_V\Big]. \tag{4.18}$$

Eğer, ek olarak, $g \in C([0,T];H^{1/2}(\Gamma_1))$ *ise, o zaman* $u \in C([0,T];H^2(\Omega))$*'dır.*

Kanıt. Bu ispatta, (4.15)'de verilen formülü kullanacağız. Yapılan varsayımlara göre $u_0 - \mathcal{N}g(0) \in D(A)$ olduğunu görüyoruz. Aslında, $u_0 - \mathcal{N}g(0) \in D(A)$ yazmak aşağıdaki şartlara denktir:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(u_0 - \mathcal{N}g(0))}{\partial \nu} & = -(\lambda + i\alpha)\Delta(u_0 - \mathcal{N}g(0)) \\ \Rightarrow \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} - g(0) & = -(\lambda + i\alpha)\Delta u_0 \\ \Delta(u_0 - \mathcal{N}g(0)) & \equiv \Delta u_0 \in V. \end{cases} \tag{4.19}$$

Çözümlerin eşleklik manasında türevlerini alıyoruz ve bu yüzden hesaplamalar eşlek uzaylarda yapılıyor.

Öte yandan, [Pazy, 1983, Teorem 2.4(b), pg.5]'ye dayanarak,

$$A\int_0^t e^{A\tau} f(t-\tau)\,d\tau = e^{At} f(0) - f(t), \tag{4.20}$$

$$A\int_0^t e^{A\tau} \mathcal{N}g(t-\tau)\,d\tau = e^{At} \mathcal{N}g(0) - \mathcal{N}g(t), \tag{4.21}$$

olduğu çıkıyor. Şimdi, Leibniz integral kuralını kullanırsak ve (4.20) ile (4.21)'i göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\,ds &= \int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{A(t-s)} f(s)\right] ds + f(t) \\
&= A\int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\,ds + \int_0^t e^{A(t-s)} f_t(s)\,ds + f(t) \\
&= A\int_0^t e^{A\tau} f(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t e^{A(t-s)} f_t(s)\,ds + f(t) \\
&= e^{At} f(0) - \cancel{f(t)} + \int_0^t e^{A(t-s)} f_t(s)\,ds + \cancel{f(t)}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

ve

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}A\int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g(s)\,ds &= -A\left[\int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{A(t-s)} \mathcal{N}g(s)\right] ds + \mathcal{N}g(t)\right] \\
&= -A\left[A\int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g(s)\,ds + \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g_t(s)\,ds + \mathcal{N}g(t)\right] \\
&= -A\left[A\int_0^t e^{A\tau} \mathcal{N}g(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g_t(s)\,ds + \mathcal{N}g(t)\right] \\
&= -A\left[e^{At} \mathcal{N}g(0) - \cancel{\mathcal{N}g(t)} + \int_0^t e^{A(t-s)} \mathcal{N}g_t(s)\,ds + \cancel{\mathcal{N}g(t)}\right]
\end{aligned} \tag{4.23}$$

elde ederiz. (4.15)'in türevini alırsak, (4.22) ve (4.23)'den, $\mathcal{L}$ (4.17)'de verilen fonksiyon ise, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
u_t(t) &= Ae^{At}u_0 - \frac{d}{dt}A\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g(s)\,ds + \frac{d}{dt}\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)\,ds \\
&= Ae^{At}u_0 + e^{At}f(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}f_t(s)ds \\
&\quad - Ae^{At}\mathcal{N}g(0) - A\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g_t(s)ds \\
&= Ae^{At}[u_0 - \mathcal{N}g(0)] + e^{At}f(0) \\
&\quad + \int_0^t e^{A(t-s)}f_t(s)ds - A\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}g_t(s)ds \\
&= Ae^{At}[u_0 - \mathcal{N}g(0)] + e^{At}f(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}f_t(s)ds - \mathcal{L}g_t(t) \\
&= I + II + III + IV.
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

$u_0 - \mathcal{N}g(0) \in D(A)$ olduğunu varsayarsak, I'in $C([0,T];V)$'ye ait olduğu çıkar. Şimdi, $f \in W^{1,1}(0,T;V) \hookrightarrow C([0,T];V)$ olduğundan, ayrıca $II \in C([0,T];V)$ elde ederiz. Benzer olarak, standart bir yarıgrup argümanı ile $III \in C([0,T];V)$ olduğunu da buluruz.

Son terim için ise, (4.17)'de verilen $\mathcal{L}$ fonksiyonunun düzgünlük özelliğini hatırlayalım. Bu yüzden, $u_t \in C([0,T];V)$'dir. Bundan ve $f \in C([0,T];V)$, olduğundan $\Delta u \in C([0,T];V)$ elde ederiz. Özel olarak, $\Delta u|_{\Gamma_1} \in C([0,T];H^{1/2}(\Gamma_1))$.

Şimdi varsayalım ki $g \in C([0,T];H^{1/2}(\Gamma_1))$ olsun. O zaman, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -(\lambda + i\alpha)\Delta u + g$, olduğundan söyleyebiliriz ki $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in C([0,T];H^{1/2}(\Gamma_1))$. Sonuç olarak, eliptik düzgünlük teorisinden $u \in C([0,T];H^2(\Omega))$ elde ederiz.

Şimdi, (4.19)'de verilen uyuşma özelliklerinden ve [Pazy, 1983, Teorem 2.4(c)]'den,

$$
A\,e^{At}[u_0 - \mathcal{N}g(0)] = e^{At}A[u_0 - \mathcal{N}g(0)] = (\lambda + i\alpha)e^{At}\Delta u_0 \tag{4.25}
$$

elde ederiz.

(4.17)'deki $\mathcal{L}$ operatörünü uyguladığımız aynı senaryoyu $\int_0^t e^{A(t-s)}f_t(s)ds$'ya $\|v_t\|_{C([0,T];V)}$ üzerinde bir kestirim elde edebilmek için uygulayacağız. Bir başka deyişle, $f_t(t) \mapsto \int_0^t e^{A(t-s)}f_t(s)ds$ ile verilen $\mathcal{K}$ fonksiyonu $L^1(0,T;V)$'den $C([0,T];V)$'ye varsyaım (i) altında süreklidir. Bunu, (4.25), $\mathcal{L}$'nin sürekliliği ve (4.24) ile birleştirirsek, bir $C = C(\alpha, \lambda, T)$ için

$$
\begin{aligned}
\|u_t\|_{C([0,T];V)} &\leq C\left\{\|\Delta u_0\|_V + \|f\|_{C([0,T];V)} + \|\mathcal{K} f_t\|_{C([0,T];V)} + \|\mathcal{L} g_t\|_{C([0,T];V)}\right\} \\
&\leq C\Big[\|u_0\|_V + \|\Delta u_0\|_V + \|f\|_{C([0,T];V)} + \|f_t\|_{L^1(0,T;V)} + \|g_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}\Big] \\
&\leq C\Big[\|u_0\|_V + \|\Delta u_0\|_V + \|f\|_{W^{1,1}(0,T;V)} + \|g\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_1))}\Big]
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

olduğu ortaya çıkar.

□

Not 4.2. *Yukarıda elde edilen* $u \in C([0,\infty); H^2(\Omega))$ *fonksiyonu problem* (2.9)*'in bir çözümüdür, yani,*

$$
\begin{cases}
(\lambda + i\alpha)\Delta u = u_t + f & \text{in } \Omega \times [0,T] \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -(\lambda + i\alpha)\Delta u + g & \text{on } \Gamma_1 \times [0,T]
\end{cases} \tag{4.27}
$$

öyle ki $f \in V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ *ve* $g \in H^{1/2}(\Gamma_1)$*. İz operatörü* $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_1)$*'nın sürekliliği ve* (4.27)*'den, şunu elde ederiz:*

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C\left(\|u_t\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} + |\lambda + i\alpha|\, \|\Delta u\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}\right) \\
&\leq C\left(\|u_t\|_V + \|f\|_V + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} + \|\Delta u\|_V\right) \\
&\leq C\left(\|u_t\|_V + \|f\|_V + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}\right).
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

Lemma (4.2), (4.26) *ve* (4.28)*'den,*

$$
\begin{aligned}
\|u_t\|_{C([0,T];V)} + \|u\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} \leq C[\|f\|_{H^1(0,T;V)} &+ \|g\|_{H^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma_1))} \\
&+ \|\Delta u_0\|_V + \|u_0\|_V]
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

olduğunu görüyoruz.

Yukarıdaki kestirimi idbvp'ye uyguladığımızda aşağıdaki sonuç çıkar:

Teorem 4.2. *(2.8) problemi için, Eksonuç 2.1'deki varsayımlara ek olarak farzedelim ki:*

(i) $f \in H^1(0,T;V)$

(ii) $\Delta u_0 \in V$ *ve* $\dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} - f|_{\Gamma_1}(0) = -(\lambda + \alpha i)\Delta u_0$.

O zaman $u_t \in C([0,T], V)$ *ve*

$$
\|u_t\|_{C([0,T];V)} + \|u\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} \leq C[\|f\|_{H^1(0,T;V)} + \|\Delta u_0\|_V + \|u_0\|_V].
$$

Kanıt. Bir önceki sonucu $g \equiv f|_{\Gamma_1}$ seçerek uygulamak yeterlidir. $f \in H^1(0,T;V)$ olduğundan, iz teorisine göre $f|_{\Gamma_1} \in H^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma_1)) \hookrightarrow H^1(0,T;V)$. (4.29)'den, istenen eşitsizlik elde edilir.

□

5. **Doğrusal-olmayan Pertürbasyonlar**

Bu bölümdeki amacımız Teorem 2.14 ve Eksonuç 2.2'yi kanıtlamaktır. $g(z)$'nin Varsayım 2.1'i sağladığı durumda, doğrusal olmayan model (2.10) için çözümler inşa edeceğiz. Burada f fonksiyonunun (2.11)'de verilen özelliği sağladığını varsayıyoruz. Önceki bölümlerde olduğu gibi, iyi konulmuşluk problemini idbvp'yi Wentzell ibvp'ye çevirerek çözeceğiz. Yani, sınır terimi $g(u_t)$'yi h'ın (2.12) sağladığını varsayarak $g((\lambda + i\alpha)\Delta u + h(u))$ ile değiştireceğiz. Burada, (2.13)'de verilen A_f evolüsyon operatörünü (2.14)'de verilen tanım kümesi altında düşünüyoruz. İlk önce, A_f operatörünün $\omega-$ maksimal disipatif olduğunu göstereceğiz:

Disipatiflik:

(2.13)'de verilen A_f operatörü doğrusal olmadığından iki çözümün farkına bakmak durumundayız. İlk önce, Green teoreminden gözlemliyoruz ki

$$
\begin{aligned}
(A_f u, v)_V &= (\lambda + i\alpha)(\nabla \cdot \Delta u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (f(u), v)_V \\
&= -(\lambda + i\alpha)(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + (\lambda + i\alpha)\left(\Delta u, \frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\quad + (f(u), v)_V \\
&= -(\lambda + i\alpha)(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \left(g^{-1}\left(-\frac{\partial u}{\partial \nu}\right), \frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\quad - \left(h(u), \frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} + (f(u), v)_V.
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

Sonuç olarak, eğer $u, v \in V$ gibi iki çözümün farkına bakar, reel kısımları alır, Varsayım 2.1'i göz önüne alırsak:

$$
\begin{aligned}
(A_f u - A_f v, u - v)_V \le &-(\lambda + i\alpha)\|\Delta u - \Delta v\|^2_{L^2(\Omega)} - m\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \\
&- \left(h(u) - h(v), \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} \\
&+ (f(u) - f(v), u - v)_V.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$
\mathrm{Re}\left(h(u) - h(v), \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} \le \|h(u) - h(v)\|_{L^2(\Gamma_1)}\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Gamma_1)} \tag{5.3}
$$

ve

$$
\mathrm{Re}(f(u) - f(v), u - v)_V \le \|f(u) - f(v)\|_V \|u - v\|_V
$$

elde ederiz. Bu noktada, h ve f'in Lipschitz sürekli olmasının burada mnemli bir rol oynadığını vurgulamamız gereklidir. $\|h(u)-h(v)\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq K\|u-v\|_V$ olduğundan,

$$\|h(u)-h(v)\|_{L^2(\Gamma_1)} \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq K\|u-v\|_V \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma_1)}, \tag{5.4}$$

ve $\|f(u)-f(v)\|_V \leq L\|u-v\|_V$ olduğundan,

$$\|f(u)-f(v)\|_V \|u-v\|_V \leq L\|u-v\|_V^2 \tag{5.5}$$

elde ederiz.

(5.4)'ün sağ tarafı üzerinde aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$K\,\|u-v\|_V \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \eta\, K^2 \|u-v\|_V^2 + \frac{1}{4\,\eta} \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2. \tag{5.6}$$

(5.5), (5.6) ve (5.2)'den

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A_f u - A_f v, u-v)_V \leq -\lambda\, \|\Delta u - \Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{1}{4\,\eta} - m\right) \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\ + [\,\eta K^2 + L\,]\|u-v\|_V^2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

olduğu çıkar. Şimdi, $\lambda > 0$ olduğundan, $\omega > \eta K^2 + L$ ve η yeterince büyük seçersek, söyleyebiliriz ki

$$\operatorname{Re}(A_f u - A_f v - \omega I(u-v), u-v)_V \leq 0, \tag{5.8}$$

yani A_f operatörü ω – disipatiftir.

Maksimallik:

Bu noktada, (3.8)'de verilen Z uzayını düşünüyoruz. Şimdi,

$$\begin{aligned} a(u,v) = \theta\,(u,v)_V \quad &+ \quad (\lambda + i\,\alpha)(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \left(g^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right), \frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} \\ &- \quad (f(u), v)_V + \left(h(u), \frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned} \tag{5.9}$$

olarak tanımlıyoruz.

Göstereceğiz ki bu form sürekli ve koersiftir, böylece Browder-Minty teoremi uygulayabileceğiz. Bu her $j \in V \subset Z'$ için, tek bir $u \in Z$'nin

$$a(u,v) = (-j, v)_V, \forall v \in Z,$$

eşitliğini θ'nın reel kısmının yeterince büyük olduğu bir durumda sağladığını verecektir.

Üçgen eşitsizliği, f, g, ve h üzerindeki sınırlardan,

$$
\begin{aligned}
(5.10)\qquad |a(u,v)| &\leq |\theta\,(u,v)_V| + (\lambda^2+\alpha^2)|(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}| \\
&+ M\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + L\|u\|_V\|v\|_V + K\|u\|_V\left\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Gamma_1)}
\end{aligned}
$$

elde ediyoruz ki burada bir $C(\lambda,\theta,\alpha,M,L,K)$ sabiti için

$$
(5.11)\qquad |a(u,v)| \leq C(\lambda,\theta,\alpha,M,L,K)\|u\|_Z\|v\|_Z
$$

olur.

Koersiflik için,

$$
\begin{aligned}
(5.12)\qquad a(u,u) &= \theta\,\|u\|_V^2 + (\lambda+i\alpha)\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(g^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right), \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} \\
&- (f(u),u)_V - \left(h(u), \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)}
\end{aligned}
$$

olduğunu gözlemliyoruz. Şimdi, karmaşık $z=x+iy$ sayısı için geçerli, $\sqrt{2}|z| \geq |x|+|y|$ eşitsizliğini yukarıya uyguluyoruz. Ayrıca, Varsayım 2.1'den, $\mathrm{Im}(\theta) \geq 0$ olacak şekilde seçersek, şunu elde ediyoruz:

$$
\begin{aligned}
&|a(u,u)| \\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\mathrm{Re}(\theta)\|u\|_V^2 + \mathrm{Re}\left(g^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right), \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)} - \mathrm{Re}(f(u),u)_V \right.\\
&\left. +\lambda\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} - \mathrm{Re}\left(h(u), \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)}\right| \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\mathrm{Im}(\theta)\|u\|_V^2 + \alpha\,\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} - \mathrm{Im}(f(u),u)_V - \mathrm{Im}\left(h(u), \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)}\right| \\
(5.13)\qquad &\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{Re}(\theta)\|u\|_V^2 + (\lambda+\alpha)\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + m\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right) \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\mathrm{Im}(\theta)}_{\geq 0}\|u\|_V^2 - \sqrt{2}\left|(f(u),u)_V\right| - \sqrt{2}\left|\left(h(u), \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Gamma_1)}\right| \\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{Re}(\theta)\|u\|_V^2 + (\lambda+\alpha)\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + m\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right) - \sqrt{2}\,\|f(u)\|_V\,\|u\|_V \\
&- \sqrt{2}\,\|h(u)\|_{L^2(\Gamma_1)}\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Gamma_1)}.
\end{aligned}
$$

f and h'ın Lipschitz olmasından faydalınarak elde edilen (5.5) ve (5.6)'yı, V'den $L^2(\Gamma_1)$'ye kısıtlamanın sürekliliği, ve Young eşitsizliğinden yeterince büyük $\eta > 0$ için aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$(5.14)\quad |a(u,u)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{Re}(\theta)\|u\|_V^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda+\alpha)\,\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\sqrt{2}\,m}{2} - \frac{1}{4\,\eta}\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}$$
$$- \sqrt{2}\left[L + \eta K^2\right]\|u\|_V^2$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\mathrm{Re}(\theta) - 2L - 2\eta K^2\right]\|u\|_V^2 + (\lambda+\alpha)\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\sqrt{2}\,m}{2} - \frac{1}{4\,\eta}\right)\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}$$
$$\geq C\|u\|_Z^2$$

Burada $\mathrm{Re}(\theta) > 2L + 2\eta K^2$ veη yeterince büyük seçiliyor ve dolayısı ile $C > 0$ oluyor.

Öyleyse Browder – Minty Teoremden, eğer $\omega > 2L + 2\eta K^2$ ise, $A_f - \omega I$ operatörü maksimal disipatif olacaktır. Bunu ve Lumer – Philips teoremini kullanarak, A_f güçlü sürekli bir yarıgrup üretir diyebiliriz. Böylece Teorem 2.4 ve Eksonuç 2.2 kanıtlanmış oldu.

6. **Düzgün Çözümlerin Lokal İyi-konulmuşluğu**

Bu bölümde amacımız problem (2.15) için çözümlerin $N \leq 3$ olduğu durumda H^2-mertebesinde lokal varlığını kanıtlamaktır (Teorem 2.5). Buraya kadar (2.9)'de verilen $f : \Omega \times (0,T) \to V$ gibi bir forcing terime sahip doğrusal mode için V'de iyi konulmuşluğu ispat etmiştik, ayrıca çözüm üzerinde uygun kontrol kestirimleri bulmuştuk (Teorem 4.2).

Öncelikle şu tanımı yapıyoruz:

$$(6.1)\qquad F(u) = -(\kappa + i\,\beta)|u|^{p-1}\,u + \gamma\,u\,.$$

Teorem 4.2'de verilen kestirimleri elde etmek için, (2.15)'de verilen denklemin distribüsyonel manada zaman değişkenine göre türevini alıyoruz . Aslında, $w = u_t$ dersek, o zaman

$$(6.2)\qquad \begin{cases} w_t - (\lambda + i\alpha)\Delta w = F_t(u,w) & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} + w_t = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ w(0) = w_0 & \text{in } \ \Omega, \end{cases}$$

elde etmiş oluyoruz. Yukarıda

$$\begin{aligned} F_t(u,w) &\equiv -(\kappa + i\beta)\left\{\frac{(p+1)}{2}|u|^{p-1}w + \frac{(p-1)}{2}|u|^{p-3}u^2\bar{w}\right\} + \gamma\,w, \\ (6.3)\qquad w_0 &\equiv (\lambda + i\alpha)\Delta\,u_0 - (\kappa + i\beta)|u_0|^{p-1}u_0 + \gamma\,u_0. \end{aligned}$$

$$K(u^\star, w^\star) = (u, w)$$

olarak tanımlanan

$$K : C(0,T; H^2(\Omega)\cap V \times V) \to C(0,T; H^2(\Omega)\cap V \times V)$$

şeklinde düşünülen operatörün, u'nun (2.15)'i $F(u^\star)$ terimi ile ve w'nun (6.2)'yi $F_t(u^\star, w^\star)$ terimi ile sağladığı durumda tercihen tek bir sabit noktası olduğunu göstermek istiyoruz. Öyle bir sabit nokta bulunduğu zaman, (u, u_t)'nin (2.15) denkleminin düzgün çözümü olduğunu göstermek rutin bir prosedürdür.

Uygun bir sabit noktanın varlığını ortaya çıkarmak için bazı önsel kestirimler elde etmeliyiz. Hem lokal hem de global teori de faydalı olacak bazı basit kestirimler ile başlıyoruz.

Lemma 6.1. *$F(u)$ ve $F_t(u,w)$ (6.1) ve (6.3)'de verildiği gibi olsun. $u \in H^2(\Omega)\cap V$ ve $w \in V$ olsun,*

(i) eğer $N \le 3$ ve $p \ge 1$, o zaman

(6.4) $$\|F(u)\|_{H^1(\Omega)} \le C(\|u\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} + 1)\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C(\|u\|^{p-1}_{H^2(\Omega)} + 1)\|u\|_{H^1(\Omega)};$$

(ii) eğer $N \le 3$ ve $p \ge 2$, o zaman

(6.5) $$\|F(u)\|_{H^2(\Omega)} \le (C\|u\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} + 1)\|u\|_{H^2(\Omega)} \le (C\|u\|^{p-1}_{H^2(\Omega)} + 1)\|u\|_{H^2(\Omega)};$$

(iii) eğer $N \le 3$ ve $p \ge 2$, o zaman

(6.6) $$\|F_t(u,w)\|_V \le C\,\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\left\{\|u\|^{p-1}_{H^2(\Omega)} + 1\right\};$$

(iv) eğer $N = 1$ ve $p \ge 2$, o zaman

(6.7) $$\|F_t(u,w)\|_V \le C\|w\|_V\left(1 + \|u\|^{p-1}_V\right);$$

(v) eğer $N = 2$ ve $p \ge 2$, o zaman

(6.8) $$\|F_t(u,w)\|_V \le C\|w\|_V\left(\|u\|^{\theta+\frac{p-2}{2}}_{H^2(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_V\|u\|_2^{\frac{p-2}{2}} + \|u\|^{\frac{p-1}{2}}_{H^2(\Omega)}\|u\|_2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right).$$

Burada $1 > \theta > 0$ küçük seçilebilir. Ayrıca, $p \in [2,5]$ ve küçük θ için,

(6.9) $$\|F_t(u,w)\|_V \le C\|w\|_V\left(\|u\|^2_{H^2(\Omega)} + \|u\|^\tau_V + 1\right)$$

doğrudur. Burada $\tau = \tau(p,\theta) > 0$;

(vi) eğer $N = 3$ ve $p \ge 2$, o zaman

(6.10) $$\|F_t(u,w)\|_V \le C\|w\|_V\left(\|u\|^{\theta+\frac{3(p-2)}{4}}_{H^2(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_V\|u\|_2^{\frac{p-2}{4}} + \|u\|^{\frac{3(p-1)}{4}}_{H^2(\Omega)}\|u\|_2^{\frac{p-1}{4}} + 1\right).$$

Burada $1 > \theta > 0$ küçük istenilen kadar seçilebilir. Ayrıca, $p \in \left[2, \frac{11}{3}\right]$ ve küçük θ için,

$$\|F_t(u,w)\|_V \le C\|w\|_V \left(\|u\|^2_{H^2(\Omega)} + \|u\|^\tau_V + 1\right) \tag{6.11}$$

doğrudur. Burada $\tau = \tau(p,\theta) > 0$.

Kanıt. Gözlemlediğimiz üzere

$$\nabla F(u) = -(\kappa + i\beta)\left\{\frac{(p+1)}{2}|u|^{p-1}\nabla u + \frac{(p-1)}{2}|u|^{p-3}u^2\nabla\bar{u}\right\} + \gamma\nabla u$$

yazabiliriz. Bu yüzden,

$$|\nabla F(u)| \le C(|u|^{p-1}|\nabla u| + |\nabla u|).$$

(6.4) eşitsizliği ve (6.5)'in ikinci kısmı doğrudan $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ gömme özelliğinden çıkar. (6.5)'deki ilk eşitsizlik [Brézis ve Gallouet, 1980]'da $p = 3$ ve $N = 2$ olduğu durumda katnıtlanmıştı. Benzer kanıt lemma'da verilen duruma da uygulanabilir. Burada fikir

$$\|u\|_{W^{1,4}(\Omega)} \le \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}$$

şeklinde verilen Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğini kullanmaktır.

(6.6)'yı ispat etmek için, önce $\nabla F_t(u,w)$ üzerinde bir kestirim elde ediyoruz:

$$|\nabla F_t(u,w)| \le C\left(|u|^{p-2}|\nabla u||w| + |u|^{p-1}|\nabla w| + |\gamma||\nabla w|\right) \tag{6.12}$$

$C := C(\kappa,\beta,p)$ dersek, üçgen eşitsizliğinden

$$\|F_t(u,w)\|_V \le C\left\{\|u\|^{p-2}_{L^\infty(\Omega)}\|w\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} + |\gamma|\,\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\right\} \tag{6.13}$$

çıkar. Şimdi, $\|w\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le \|w\|_V\|u\|_{H^2(\Omega)}$ ve $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ olduğunu kullanarak (6.6)'yı elde ediyoruz.

$N = 1$ ise, o zaman $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$'ı ve (6.13) kullanıp,

$$\|F_t(u,w)\|_V \le C\|w\|_V\left(1 + \|u\|^{p-1}_V\right)$$

olduğunu kolayca görürüz.

$N = 2$ ise, o zaman $s > 2$, $0 < \theta = 1 - \frac{2}{s} < 1$ olduğu durumda

$$\|\nabla u\|_{L^s(\Omega)} \le \|u\|^\theta_{H^2(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_V$$

şeklinde verilen Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinden ve $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $(q \geq 1)$ şeklinde verilen Sobolev gömme özelliğinden $r = \dfrac{2s}{s-2}$ için

$$\begin{aligned} \|w\nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\|w\|_{L^r(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^s(\Omega)} \\ &\leq C\|w\|_V \|u\|^{\theta}_{H^2(\Omega)} \|u\|_V^{1-\theta} \end{aligned} \tag{6.14}$$

elde ederiz. Ayrıca $N = 2$ için, şu Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği de geçerlidir:

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)} \|u\|_2^{\frac{1}{2}}.$$

Bu yüzden(6.13)'den şunu elde ederiz

$$\|F_t(u,w)\|_V \leq C\|w\|_V \left\{ \|u\|^{\theta+\frac{p-2}{2}}_{H^2(\Omega)} \|u\|_V^{1-\theta} \|u\|_2^{\frac{p-2}{2}} + \|u\|^{\frac{p-1}{2}}_{H^2(\Omega)} \|u\|_2^{\frac{p-1}{2}} + 1 \right\}. \tag{6.15}$$

Dikkat etmek gerekir ki yukarıdaki eşitsizlikte, eğer $p \leq 5$ ise, o zaman $\frac{p-1}{2} \leq 2$.

Eğer $N = 3$ ise,

$$\|\nabla u\|_{L^3(\Omega)} \leq \|u\|^{\frac{1}{3}}_{H^2(\Omega)} \|u\|_V^{\frac{2}{3}}$$

şeklinde verilen Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğini yeniden kullanabiliriz ve $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ gömme özelliğinden

$$\begin{aligned} \|w\nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\|w\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^3(\Omega)} \\ &\leq C\|w\|_V \|u\|^{\theta}_{H^2(\Omega)} \|u\|_V^{1-\theta} \end{aligned} \tag{6.16}$$

elde ederiz. Ayrıca $N = 3$ için, şu Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği de geçerlidir:

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|^{\frac{3}{4}}_{H^2(\Omega)} \|u\|_2^{\frac{1}{4}}.$$

Bu yüzden

$$\|F_t(u,w)\|_V \leq C\| w\|_V \left\{ \|u\|^{\theta+\frac{3(p-2)}{4}}_{H^2(\Omega)} \|u\|_V^{1-\theta} \|u\|_2^{\frac{p-2}{4}} + \|u\|^{\frac{3(p-1)}{4}}_{H^2(\Omega)} \|u\|_2^{\frac{p-1}{4}} + 1 \right\} \tag{6.17}$$

elde ederiz. Yukarıdaki durumda, eğer $p \leq \frac{11}{3}$ ise, $\frac{3(p-1)}{4} \leq 2$ olduğuna dikkat etmek gerekir. □

Şimdi aşağıdaki uyuşma özelliklerini dikkate alıyoruz:

Tanım 6.1. *[Uyuşma Özellikleri (CC)]*

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + (\lambda + i\alpha)\Delta u_0 - F(u_0) = 0 \ on \ \Gamma_1.$$

Ayrıca, aşağıdaki uzayları tanımlıyoruz:

$$X_0 = \begin{cases} (u_0, w_0) \in V \times V \\ w_0 = (\lambda + i\alpha)\Delta u_0 - F(u_0) \\ \Delta u_0 \in V \\ u_0 \text{ satisfies CC (Definition 6.1)} \end{cases}$$

ve Banach uzayı olan

$$X_T = \left\{(u,w) : u \in C[0,T; H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)], w \in C[0,T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)), u_t = w\right\}.$$

Eliptik teorinden kolayca

$$\Delta u_0 \in V \hookrightarrow H^1(\Omega) \text{ and } \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = -w_0|_{\Gamma_1} \in H^{1/2}(\Gamma)$$

olduğunu biliyoruz. Öyleyse: $(u_0, w_0) \in X_0 \Rightarrow u_0 \in H^2(\Omega)$ doğrudur.

O yüzden X_0 ve X_T üzerinde aşağıdaki normları tanımlıyabiliriz:

$$\|(u,w)\|^2_{X_0} = \|u\|^2_{H^2(\Omega)} + \|w\|^2_V,$$

$$\|(u,w)\|^2_{X_T} = \sup_{t\in[0,T]} \|u\|^2_{H^2(\Omega)} + \sup_{t\in[0,T]} \|w\|^2_V.$$

Teorem 2.5'i bir kaç adımda kanıtlayacağız.

1.Adım: Çözüm operatörünü inşa etme: Bir sabit nokta elde edebilmek için daha önceden tanıtılan K operatörünü aşağıda özel olarak inşa ettiğimiz tam metrik uzaya kısıtlayacağız.

Lemma 6.2.

$$Q_T \equiv \{(u^*, w^*) \in X_T \text{ s.t. } u^*(0) = u_0\}$$

olsun. O zaman, Q_T boş olmayan X_T'nin normudan elde edilen metriğe göre bir tam metrik uzaydır, yani burada metrik şu şekilde yazılabilir:

$$d_{Q_T}((u_1^*, w_1^*), (u_2^*, w_2^*)) = \sup_{t\in[0,T]} \|u_1^* - u_2^*\|^2_{H^2(\Omega)} + \sup_{t\in[0,T]} \|w_1^* - w_2^*\|^2_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)}.$$

Kanıt. $(u_0, 0) \in Q_T$, yani Q_T boş değildir. d_{Q_T}'nin bir metrik olduğunu görmek kolaydır. Q_T'nin tamlığını göstermek için, diyelim ki $(u_n^*, w_n^*) \in Q_T$ olsun öyle ki $(u_n^*, w_n^*) \to (u^*, w^*) \in X_T$. Bunun anlamı $u_n^*(0) = u_0$ ve $\lim_n \left[\sup_{t\in[0,T]} \|u_n^* - u^*\|^2_{H^2(\Omega)}\right] = 0$ demektir ki bu

$$0 \le \|u^*(0) - u_0\|_{H^2(\Omega)} = \|u^*(0) - u_n^*(0)\|_{H^2(\Omega)} \le \sup_{[0,T]} \|u^* - u_n^*\|_{H^2(\Omega)}$$

olduğunu verir. $n \to \infty$ durumundaki limiti düşünürsek, $u^*(0) = u_0$ elde ederiz. Yani, $(u^*, w^*) \in Q_T$. Öyleyse Q_T kapalıdır. Tam uzayların kapalı alt kümeleri de tamdır. Bu yüzden, Q_T tamdır çünkü X_T tamdır. □

Şimdi $(u_0, w_0) \in X_0$ alalım. $(u^\star, w^\star) \in Q_T$ olduğunda $K(u^\star, w^\star)$ görüntüsünü düşünelim. Bu görüntü $(u, w) \in C^1([0,T]; V) \cap C([0,T]; V)$ gibi aşağıdaki problemleri çözen fonksiyonlar verir:

$$\begin{cases} u_t - (\lambda + i\alpha)\Delta u = F(u^\star), \Omega \times \mathbb{R}_+\text{'da}, \\ u = 0, \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+\text{'da}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda + i\alpha)\Delta u - F(u^\star) = 0, \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+\text{'da}, \\ u(0) = u_0, \Omega\text{'da} \end{cases} \tag{6.18}$$

and

$$\begin{cases} w_t - (\lambda + i\alpha)\Delta w = F_t(u^\star, w^\star), \Omega \times \mathbb{R}_+\text{'da}, \\ w = 0, \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+\text{'da}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} + (\lambda + i\alpha)\Delta w - F_t(u^\star, w^\star) = 0, \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+\text{'da}, \\ w(0) = w_0, \Omega\text{'da.} \end{cases} \tag{6.19}$$

Bu noktada bazı önemli noktalara değinmeliyiz.

Not 6.1. (i) *u_0'ın gerekli uyuşma özelliklerinis sağladığına dikkat etmek gerekir çünkü (u^*, w^*) bir önceki lemma'da verilen Q_T uzayından alınıyor, bu $F(u^*(0)) = F(u_0)$ olmasını zorunlu kılıyor.*

(ii) *Ayrıca K'nın Q_T'nin elemanlarını tekrardan Q_T'ye gönderdiğini gözlemlemek gerekir. Bu doğrusal teoriden ve $(u, w) = K(u^*, w^*)$'ın [0,T]'de sürekli olmasından kaynaklanıyor. Her zaman $u(0) = u_0$, yani, $(u, w) \in Q_T$ oluyor.*

$K(u^\star, w^\star)$ operatörleri aşağıdaki işlemlerin birşeşimi olarak düşünnülebilir

$$\begin{cases} K(u^\star, \cdot) : u^\star \longmapsto F(u^\star) \longmapsto u \\ K(\cdot, w^\star) : w^\star \longmapsto F_t(\cdot, w^\star) \longmapsto w. \end{cases}$$

Bu bileşen fonksiyonları Lemma 4.2'den aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
&K(u^\star,\cdot)=u(t)\\
&\qquad=\left(e^{At}u_0^* - \int_0^t e^{A(t-s)}A\mathcal{N}F(u^\star(s))\,ds + \int_0^t e^{A(t-s)}F(u^\star(s))\,ds\right) &&(6.20)\\
&K(\cdot,w^\star)=w(t)\\
&\qquad=\left(e^{At}w_0^* - \int_0^t e^{A(t-s)}A\mathcal{N}F_t(\cdot,w^\star(s))\,ds + \int_0^t e^{A(t-s)}F_t(\cdot,w^\star(s))\,ds\right). &&(6.21)
\end{aligned}
$$

Daha önceden olduğu gibi yukarıda da A (2.4)'de Wentzell sınır koşulları ile verilen operatör, $\mathcal{N}$ de (4.1)'de verilen Neumann fonksiyon.

2.Adım: Kestirimler ve X_T'deki yuvarın değizmelik özelliği:

$K(u^\star,w^\star)=(u,w)$ tanımladığımızı hatırlayalım. Burada u (6.18)'i sağ taraf $f\equiv F(u^\star)$ olduğunda ve w (6.19)'u sağ taraf $f\equiv F_t(u^\star,w^\star)$ olduğunda çözüyor. Başlangıç koşulu gerekli uyuşma özelliklerini sağladığından, Teorem 4.2'de verilen kestirimleri kullanabiliriz. Bu bize şunu veriyor:

$$
\begin{aligned}
&\|w\|_{C([0,T];V)}+\|u\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} &&(6.22)\\
&\le C\left(\|F(u^\star)\|_{L^2(0,T;V)}+\|F_t(u^\star,w^\star)\|_{L^2(0,T,V)}+\|u_0\|_V+\|\Delta u_0\|_V\right).
\end{aligned}
$$

Öncelikle $K(u^\star,w^\star)$ operatörünün $B_R(Q_T)$'yi $B_R(Q_T)$'ye gönderdiğini gösterelim. Burada $B_R(Q_T)$ yarıçapı R olan Q_T'den alınmış kapalı yuvarı temsil ediyor. Aşağıda R ve T'nin uygun değerlerini bulacağız. Bunu başarmak için, (6.22) ve Lemma 6.1'de verilen kestirimleri kullanacağız. Bu noktada, $R>0$ sabit bir sayı (birazdan seçilecek) ve $(u^*,w^*)\in B_R(X_T)$ olsun.

Lemma 6.1'de verilen (6.4) ve (6.6) kestirimlerinden aşağıdakini elde ediyoruz:

$$
\begin{aligned}
&\|F(u^\star)\|_{L^2(0,T;V)}+\|F_t(u^\star,w^\star)\|_{L^2(0,T,V)}\\
&=\left[\int_0^T \|F(u^\star(t))\|_V^2\,dt\right]^{1/2}+\left[\int_0^T \|F_t(u^\star(t),w^\star(t))\|_V^2\,dt\right]^{1/2}\\
&\le\left[\int_0^T 2\left(1+\|u^\star(t)\|_{H^2(\Omega)}^{2(p-1)}\right)\left(\|u^\star(t)\|_V^2+\|w^\star(t)\|_V^2\right)dt\right]^{1/2} &&(6.23)\\
&\le C\,T^{1/2}\left(1+\|u^\star\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}^{p-1}\right)\left(\|u^\star\|_{C([0,T];H^2(\Omega))}+\|w^\star\|_{C([0,T];V)}\right).\\
&\le C\,2RT^{1/2}\left(1+R^{p-1}\right).
\end{aligned}
$$

(6.22) ve (6.23)'ü birleştirirsek,

$$\begin{aligned}
\|K(u^\star, w^\star)\|_{X_T} &= \|(u, w)\|_{X_T} \\
&= \|w\|_{C([0,T];V)} + \|u\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} \\
&\le C_{u_0} + C\,2RT^{1/2}\left(1 + R^{p-1}\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $R = 2C_{u_0}$ olsun. O zaman, küçük T için, K $B_R(Q_T)$'yi kendi üzerinde gönderir.

Step 3: Sabit nokta. Küçük T için, $1 > \rho > 0$ oldğunu ve

$$\|K(u_1^\star, w_1^\star) - K(u_2^\star, w_2^\star)\|_{X_T} \le \rho\,\|(u_1^\star - u_2^\star, w_1^\star - w_2^\star)\|_{X_T},\ \forall\,(u_1^\star, w_1^\star), (u_2^\star, w_2^\star) \in B_R(X_T).$$

sağlandığını göstereceğiz. Diyelim ki $(u_1^*, w_1^*), (u_2^*, w_2^*) \in X_T$. Yukarıdaki argümanlara benzer olarak, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\|K(u_1^\star, w_1^\star) - K(u_2^\star, w_2^\star)\|_{X_T} &= \|(u_1 - u_2, w_1 - w_2)\|_{X_T} \\
&= \|u_1 - u_2\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + \|w_1 - w_2\|_{C([0,T];V)} \\
&\le \int_0^T \|F(u_1^\star(s)) - F(u_2^\star(s))\|_{H^2(\Omega)}\,ds \\
&\quad + \int_0^T \|F_t(u_1^\star(s), w_1^\star(s)) - F_t(u_2^\star(s), w_2^\star(s))\|_V\,ds\,.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

F ve F_t'nin lokal Lipschitz kestirimleri kullanarsak, $(u_1^\star, w_1^\star), (u_2^\star, w_2^\star) \in B_R(X_T)$, aldığımızda

$$\begin{aligned}
\|F(u_1^\star) - F(u_2^\star)\|_{H^2(\Omega)} &\le C_1\left(\|u_1^\star\|_{H^2(\Omega)}^{c(p)}, \|u_2^\star\|_{H^2(\Omega)}^{c(p)}, |\gamma|\right)\|u_1^\star - u_2^\star\|_{H^2(\Omega)} \\
&\le C_1(R)\,\|u_1^\star - u_2^\star\|_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|F_t(u_1^\star, w_1^\star) - F(u_2^\star, w_2^\star)\|_V &\le C_2\left(\|u_1^\star\|_{H^2(\Omega)}^{c(p)}, \|u_2^\star\|_{H^2(\Omega)}^{c(p)}, |\gamma|\right)\|w_1^\star - w_2^\star\|_V \\
&\le C_2(R)\,\|w_1^\star - w_2^\star\|_V
\end{aligned}$$

elde ederiz. $C_3 := \max\{C_1(R), C_2(R)\}$ tanımını yaparsak, (6.24)'den

$$\begin{aligned}
&\|K(u_1^\star, w_1^\star) - K(u_2^\star, w_2^\star)\|_{X_T} \\
&\le C_3 \int_0^T \left[\|u_1^\star(s) - u_2^\star(s)\|_{H^2(\Omega)} + \|w_1^\star(s) - w_2^\star(s)\|_V\right] ds \\
&\le T\,C_3\left[\|u_1^\star - u_2^\star\|_{C([0,T];H^2(\Omega))} + \|w_1^\star - w_2^\star\|_{C([0,T];V)}\right] \\
&\le TC_3\,\|(u_1^\star - u_2^\star, w_1^\star - w_2^\star)\|_{X_T}
\end{aligned} \tag{6.25}$$

elde ederiz. Yukarıdaki kestirim küçük T için K operatörünün daraltan olduğunu gösteriyor. Bu $B_R(Q_T)$'de düzgün çözümlerinin lokal varlık ve tekliğini veriyor.

Not 6.2. *Yukarıdaki sonuç $B_R(Q_T)$'de tek bir çözüm olduğunu veriyor. Bu doğrudan Q_T'de tek çözüm olduğu anlamına gelmiyor. $\alpha, \beta > 0$ olduğu durumda, tekliği Q_T'de de gösterebiliyoruz. Bu* (7.10)*'dan çıkıyor.*

7. **Düzgün Çözümlerin Global İyi-konulmuşluğu**

Bu bölümde, dinamik sınır koşulları ie tanımlanan CGLE modeli için, kuvvet tipi doğrusal olmayan terimler olduğu ve ek olarak $\beta > 0$ olduğu durumda global çözümlerin iyi konulmuşluğunu çalışacağız. Kanıtlarımız genel itibari ile Sobolev gömme teoremlerine bağlı olacaktır. Bu yüzden, p üzerinde bazı varsayımlarımız olacak. [4]'te, defocusing kübik NLS için dinamik sınır koşulları altında ve $N = 2$ olduğu durumda, global çözümlerin iyi konulmuşluğu elde ediliyor. Biz, bu sonucu CGLE kapsamında $N \leq 3$ için elde edebiliyoruz. Daha kesin bir dille söyleyecek olursak, global iyi konulmuşluğu eğer $N = 1$ ise $p \geq 2$ için; eğer $N = 2$ ise $p \in [2, 5]$ için; ve eğer $N = 3$ ise $p \in \left[2, \frac{11}{3}\right]$ için kanıtlayacağız. Düzgünleştirici etki bu kapsamda önemli bir rol oynayacak. Bu doğrusal olmayan Schrödinger denklemlerinde var olmayan bir özelliktir.

Şimdi $0 < T_{\max} \leq \infty$ verilen bir lokal çözüm için maksimal varlık zamanını temsil etsin. $\|(u, u_t)\|_{X_T}$'nin $[0, T_{\max})$ üzerinde sınırlı kaldığını göstererek aslında $T_{\max} = \infty$ olduğunu kanıtlayacağız. Bu bağlamda öncelikle, aşağıdaki her boyutta doğru olan lemmayı ispatlıyoruz. Bu lemma'da verilen kestirimlerin benzerleri [Bechouche ve Jüngel, 2000, Lemmas 3.2 ve 5.2]'de, bölgenin bütün uzay ya da torus (periyodik sınır koşulları) olduğu durumlarda gösterilmiştir. Burada, amacımız çözümlerin enerjisi üzerinde düzgün bir sınır bulmaktır.

Lemma 7.1. *Diyelim ki $u_0 \in V \cap L^{p+1}(\Omega)$ ve $\gamma_0 u_0 \in L^{p+1}(\Gamma_1)$.*

(i) Eğer $\gamma > 0$, o zaman $E(t) \leq E(0)\exp(CT_{max})$ $(t \in [0, T_{max}))$. Burada

$$E(t) \equiv \frac{\alpha}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{p+1}\|u(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} + \frac{1}{p+1}(\alpha\kappa + \beta\lambda)\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Gamma_1)} + \alpha\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}ds + \alpha\lambda\int_0^t \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \kappa\beta\int_0^t \|u(s)\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)}. \tag{7.1}$$

(ii) eğer $\gamma \leq 0$, o zaman $E(t) \leq E(0)$ $(t \in [0, T_{max}))$. Burada

$$E(t) \equiv \frac{\alpha}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{p+1}\|u(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} - \frac{\alpha\gamma}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{1}{p+1}(\alpha\kappa+\beta\lambda)\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Gamma_1)} + \alpha\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}ds + \alpha\lambda\int_0^t \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \kappa\beta\int_0^t \|u(s)\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)}. \tag{7.2}$$

Ayrıca, her $T > 0$ için aşağıdaki düzgünlük özellikleri geçerlidir:

$$(u, u_t) \in [C([0,T]; V \cap L^{p+1}(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega)) \cap L^{2p}(0,T; L^{2p}(\Omega))] \times L^2(0,T; L^2(\Omega)),$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \gamma_0 u_t \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_1)), \gamma_0 u \in C([0,T]; L^{p+1}(\Gamma_1)).$$

Kanıt. $-\alpha\Delta u + \beta|u|^{p-1}u$ ve u_t'nin iç çarpımının reel kısmını alarak başlıyoruz:

$$\begin{aligned} Re(-\alpha\Delta u + \beta|u|^{p-1}u, u_t) &= Re(-\alpha\Delta u + \beta|u|^{p-1}u, (\lambda+i\alpha)\Delta u - (\kappa+i\beta)|u|^{p-1}u + \gamma u) \\ &= -\alpha\lambda\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\gamma\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \alpha\gamma Re(\frac{\partial u}{\partial n}, u)_{L^2(\Gamma_1)} - \kappa\beta\|u\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} + \beta\gamma\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \\ &\quad + \alpha Re(\Delta u, (\kappa+i\beta)|u|^{p-1}u) + \beta Re(|u|^{p-1}u, (\lambda+i\alpha)\Delta u) \\ &= -\alpha\lambda\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\gamma\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \alpha\gamma Re(\frac{\partial u}{\partial n}, u)_{L^2(\Gamma_1)} - \kappa\beta\|u\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} + \beta\gamma\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \\ &\quad - \alpha Re(\nabla u, (\kappa+i\beta)\nabla\left(|u|^{p-1}u\right)) + \alpha Re(\frac{\partial u}{\partial n}, (\kappa+i\beta)|u|^{p-1}u)_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\quad - \beta Re(\nabla(|u|^{p-1}u), (\lambda+i\alpha)\nabla u) + \beta Re(|u|^{p-1}u, (\lambda+i\alpha)\frac{\partial u}{\partial n})_{L^2(\Gamma_1)}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

(7.3)'ün sağ tarafındaki ilk sınır terimi üzerinde şu şekilde bir kestirim elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \left|-\alpha\gamma Re(\frac{\partial u}{\partial n}, u)_{L^2(\Gamma_1)}\right| &\le \frac{\alpha\gamma}{2}\left(C_\epsilon\|u\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \epsilon\left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right) \\ &\le \frac{\alpha\gamma}{2}\left(C_\epsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon\|u_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Alternatif olarak, $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = -u_t$ kullanarak

$$-\alpha\gamma Re(\frac{\partial u}{\partial n}, u)_{L^2(\Gamma_1)} = \frac{\alpha\gamma}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \tag{7.5}$$

yazabiliriz.

$\beta > 0$ varsayımı altında, $\alpha\kappa + \beta\lambda > 0$ olur ve

$$(7.6)\quad -\alpha Re(\nabla u, (\kappa+i\beta)\nabla\left(|u|^{p-1}u\right)) - \beta Re(\nabla(|u|^{p-1}u), (\lambda+i\alpha)\nabla u)$$
$$= -(\alpha\kappa+\beta\lambda)Re(\nabla(|u|^{p-1}u), \nabla u) = -(\alpha\kappa+\beta\lambda)Re(\nabla u, (\frac{p+1}{2}|u|^{p-1}\nabla u + \frac{p-1}{2}|u|^{p-3}u^2\nabla\bar{u}))$$
$$= -(\alpha\kappa+\beta\lambda)\left[\frac{p+1}{2}\int_\Omega |u|^{p-1}|\nabla u|^2 dx + \frac{p-1}{2}Re\int_\Omega |u|^{p-3}\bar{u}^2(\nabla u)^2 dx\right] \leq 0.$$

(7.3)'ün sağ tarafındaki son terim şöyle hesaplanabilir:

$$(7.7)\quad \alpha Re(\frac{\partial u}{\partial n}, (\kappa+i\beta)|u|^{p-1}u)_{L^2(\Gamma_1)} + \beta Re(|u|^{p-1}u, (\lambda+i\alpha)\frac{\partial u}{\partial n})_{L^2(\Gamma_1)}$$
$$= (\alpha\kappa+\beta\lambda)Re(|u|^{p-1}u, \frac{\partial u}{\partial n})_{L^2(\Gamma_1)} = -\frac{1}{(p+1)}(\alpha\kappa+\beta\lambda)\frac{d}{dt}\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Gamma_1)}.$$

On the other hand, by using the main equation, we can rewrite the same scalar product in (7.3) as

$$(7.8)\quad Re(-\alpha\Delta u + \beta|u|^{p-1}u, u_t) = \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{p+1}\frac{d}{dt}\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} - \alpha Re(\frac{\partial u}{\partial n}, u_t)_{L^2(\Gamma_1)}$$
$$= \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{p+1}\frac{d}{dt}\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} + \alpha\|u_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Eğer $\gamma \geq 0$ ise, küçük ve sabit $\epsilon > 0$ için

(7.9)
$$E(t) - E(0) \leq \alpha\gamma(1+\frac{C_\epsilon}{2})\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \beta\gamma\int_0^t \|u(s)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} + \epsilon\frac{\alpha\gamma}{2}\int_0^t \|u_t(s)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} ds$$
$$\leq \epsilon\frac{\gamma}{2}E(t) + C\int_0^t E(s)ds$$

else ederiz.

Bu yüzden,

$$E(t) \leq CE(0) + C\int_0^t E(s)ds.$$

Gronwall eşitsizliğinden, her $t \in [0, T_{max})$

$$(7.10)\qquad E(t) \leq E(0)\exp(CT_{max})$$

olduğunu buluyoruz.

Şimdi, $\gamma < 0$ durumunu düşünüyoruz ve $E(t)$'yi (7.2)'deki gibi tanımlıyoruz. (7.5)'teki alternatif hesaplamayı kullanırsak,

$$E(t) - E(0) \leq \frac{\alpha\gamma}{2}\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \beta\gamma \int_0^t \|u(s)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \leq 0 \tag{7.11}$$

elde ederiz. Buradan $E(t) \leq E(0)$ çıkar.

Böylece kanıtlamış olduk ki (u, u_t) şu anlamda globaldir: yani, her $T > 0$ için,

$$(u, u_t) \in \left[C([0,T]; V \cap L^{p+1}(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega)) \cap L^{2p}(0,T; L^{2p}(\Omega))\right] \times L^2(0,T; L^2(\Omega))$$

ve

$$\gamma_0 u \in C([0,T]; L^{p+1}(\Gamma_1)), \frac{\partial u}{\partial n} = \gamma_0 u_t \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_1)).$$

□

Lemma 7.2. *u lokal bir çözüm olsun. O zaman,*

(1) Eğer $N = 1$ ve $1 < p < \infty$ ise, o zaman $\|F(u)\|_V \leq C$.

(2) Eğer $N = 2$ ve $1 < p < \infty$ ise, o zaman $\|F(u)\|_V \leq C + C\|u\|^{\theta}_{H^2(\Omega)}$. Burada $1 > \theta > 0$ istenilen kadar küçük seçilebilen bir sabiti temsi ediyor.

(3) Eğer $N \geq 3$ ve $1 < p < \frac{N}{N-2}$ ise, o zaman $\|F(u)\|_V \leq C + C\|u\|^{\theta}_{H^2(\Omega)}$. Burada $1 > \theta > 0$ istenilen kadar küçük seçilebilen bir sabiti temsi ediyor.

(4) Eğer $N = 3$ ve $p \geq 3$, o zaman $\|F(u)\|_V \leq C + C\|u\|^{\frac{3(p-1)}{4}}_{H^2(\Omega)}$. Eğer ek olarak $p < \frac{11}{3}$ ise, o zaman her küçük sabit $\epsilon > 0$ için $\|F(u)\|_V \leq C_\epsilon + \epsilon\|u\|^2_{H^2(\Omega)}$.

Kanıt. Kolayca hesaplanabilir ki,

$$\nabla F(u) = -(\kappa + i\beta)\left\{\frac{(p+1)}{2}|u|^{p-1}\nabla u + \frac{(p-1)}{2}|u|^{p-3}u^2\nabla\bar{u}\right\} + \gamma\nabla u.$$

Bu yüzden,

$$|\nabla F(u)| \leq C(|u|^{p-1}|\nabla u| + |\nabla u|).$$

$N = 1$ durumu, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ gömme özelliğinden ve Lemma 7.1'den kolayca kanıtlanabilir.

$N = 2$ ve $1 < p < \infty$ durumunu düşünelim. O zaman,

$$\|\nabla u\|_{L^s(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{H^2(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_V \tag{7.12}$$

şeklinde verilen Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinden ($s > 2$ ve $0 < \theta = 1 - \frac{2}{s} < 1$), $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ($q \geq 1$) gömme özelliğinden, ve Lemma 7.1'den, $q > 2(p-1)$ ve $q \geq 1$ için

$$\|F(u)\|_V \leq C\left(\|u\|_q^{(p-1)}\|\nabla u\|_s + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right) \leq C\left(\|u\|_V^{(p-1)}\|u\|_V^{1-\theta}\|u\|^{\theta}_{H^2(\Omega)} + \|u\|_V\right) \tag{7.13}$$

elde ederiz.

Şimdi $N \geq 3$ ve $1 < p < \frac{N}{N-2}$ olsun; o zaman aşağıdaki Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği:

$$\|\nabla u\|_{L^s(\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)}^{\theta} \|u\|_V^{1-\theta} \tag{7.14}$$

$\dfrac{2N}{N-2} > s = \dfrac{4N}{2N-2(N-2)(p-1)} > 2$ ve $0 < \theta = \dfrac{(s-2)N}{2s} < 1$ için geçerlidir.

$q = \frac{2N}{N-2}$ için, (7.13) şeklinde yazılabilir

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_V &\leq C\left(\||u|^{p-1}|\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} + |\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}\right) \leq C\left(\|u\|_q^{(p-1)}\|\nabla u\|_s + \|u\|_V\right) \\ &\leq C\left(\|u\|_V^{(p-1)}\|u\|_{H^2(\Omega)}^{\theta}\|u\|_V^{1-\theta} + \|u\|_V\right). \end{aligned} \tag{7.15}$$

$N = 3$ ve $p \geq 3$ ise, o zaman aşağıdaki Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği geçerlidir:

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}\|u\|_2^{\frac{1}{4}}.$$

Bu yüzden,

$$\|F(u)\|_V \leq C\left(\|u\|_\infty^{p-1}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right) \leq C\left(\|u\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}(p-1)}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{p-1}{4}}\|\nabla u\|_2 + \|u\|_V\right). \tag{7.16}$$

Dikkat etmek gerekir ki, $p < \frac{11}{3}$ ise, $\frac{3}{4}(p-1) < 2$'dir. □

Şimdi, $C(u_0, T_{\max})$ ve C gibi sabitler için aşağıdaki kestirimi kanıtlayacağız:

$$\begin{aligned} \|u_t(t)\|_V + \|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C(u_0, T_{\max}) + C\Bigg(&\int_0^t \|F_t(u(s), u_t(s))\|_V ds \\ &+ \left[\int_0^t\int_{\Gamma_1} |F_t(u(s), u_t(s))|^2 d\Gamma\, ds\right]^{1/2}\Bigg). \end{aligned} \tag{7.17}$$

(2.9)'da $f = F(u)$ yazar, $g = -f|_{\Gamma_1}$ olduğundan ve (4.25)'i kullanarak, (4.24)'ü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

(7.18)

$$u_t = (\lambda + i\alpha)e^{At}\Delta u_0 + e^{At}F(u_0) + \int_0^t e^{A(t-s)}F_t(u(s), u_t(s))ds - A\int_0^t e^{A(t-s)}\mathcal{N}F_t(u(s), u_t(s))ds.$$

Öte yandan, Lemma 7.2'den, ortaya çıkıyor ki

$$\|e^{At}F(u_0)\|_V \leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega)}). \tag{7.19}$$

O zaman, (7.18), (7.19), (4.17)'de verilen $\mathcal{L}$ operatörünün sürekliliğinden (diyelim ki sınırı η), şunu elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
\|u_t(t)\|_V &\leq \underbrace{C\left(\|\Delta u_0\|_V, \|u_0\|_{H^2(\Omega)}\right)}_{:=C_{u_0}} + \int_0^t \|F_t(u(s),u_t(s))\|_V ds + \|\mathcal{L}(F_t(u(s),u_t(s)))\|_{C([0,T];V)} \\
&\leq C_{u_0} + \int_0^t \|F_t(u(s),u_t(s))\|_V\, ds + \eta \|F_t(u(s),u_t(s))\|_{L^2(0,t;L^2(\Gamma_1))} \\
&= C_{u_0} + \int_0^t \|F_t(u(s),u_t(s))\|_V\, ds + \eta \left[\int_0^t \|F_t(u(s),u_t(s))\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\, ds\right]^{1/2} \\
&\leq C_{u_0} + \int_0^t \|F_t(u(s),u_t(s))\|_V\, ds + \eta \left[\int_0^t \|F_t(u(s),u_t(s))\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\, ds\right]^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

Şimdi, (4.28) ve iz operatörünün $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_1)$ (diyelimki sınırı ς) sürekliliğinden,

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C_1\left(\|u_t(t)\|_V + \|F(u(t))\|_V + \|F(u(t))\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}\right) \\
&\leq C_1\left(\|u_t(t)\|_V + (1+\varsigma)\|F(u(t))\|_V\right).
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

Böylece, Lemma 7.2, (7.20) ve (7.21)'den, (7.17)'yi göstermiş oluyoruz.

Gagliardo - Nirenberg eşitsizliğinden göstermek mümkündür ki (bakınız [Bechouche ve Jüngel, 2000]):

$$
\begin{aligned}
\|z(t)\|_{H^2(\Omega)} &\leq C\left(\|z\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq \widetilde{C}\left(\|z\|_V + \|\Delta z\|_{L^2(\Omega)}\right), \ \forall z \in H^2(\Omega).
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

Öte yandan, Lemma 6.1 ve (7.22)'den,:

$$
\int_0^t \|F_t(u(s),u_t(s))\|_V\, ds \leq C \int_0^t \|w(s)\|_V \left(\|u(s)\|^2_{H^2(\Omega)} + 1\right) ds \tag{7.23}
$$

elde ederiz.

$\widetilde{\gamma}$ Γ_1 kısıtlama yapan iz operatörü olsun, iz-interpolasyon eşitsizliğinden

$$
\|\widetilde{\gamma} u\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{7.24}
$$

Yukarıdaki eşitsizlikten faydalanarak

$$
\|\widetilde{\gamma} F_t(u,w)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq C\|F_t(u,w)\|_{H^1(\Omega)}\|F_t(u,w)\|_{L^2(\Omega)} \tag{7.25}
$$

olduğunu elde ederiz.

$N=1$ için $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ geçerlidir; $N=2$ için $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $(1 \leq q < \infty)$ geçerlidir; $N \geq 3$ için $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $(1 \leq q \leq \frac{2N}{N-2})$ geçerlidir. Bu gömme özelliklerinden ve Lemma 7.1'den, $N \geq 3$ ise $p \leq \frac{N}{N-2}$ varsayımı ile, aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|F_t(u,w)\|_{L^2(\Omega)} \le C\left(\| |u|^{p-1} w\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)}\right) \le CE(0)\|w\|_V. \tag{7.26}$$

Lemma 7.3. *$\alpha, \beta, \lambda, \kappa > 0$ olsun. O zaman, bir $M > 0$ sabiti için*

$$\sup_{t\in[0,T_{max})} \|w(t)\|_V < M < \infty.$$

Kanıt. (6.2)'yi $-\alpha\Delta\bar{w}$ ile çarpıyoruz, Ω üzerinde integre ediyoruz ve reel kısımları alıyoruz. O zaman, (7.26)'yı kullanarak

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|w_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \alpha\lambda\|\Delta w\|_2^2 &= -\alpha \mathrm{Re}(F_t(u,w), \Delta w)_{L^2(\Omega)} \\ &\le \frac{1}{4\epsilon}\|F_t(u,w)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon\|\Delta w\|^2_{L^2(\Omega)} \le C(E(0))\|w\|_V^2 + \epsilon\|\Delta w\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{7.27}$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\|w(t)\|_V^2 \le \|w_0\|_V^2 + C(E(0))\int_0^t \|w(s)\|_V^2 ds.$$

Şimdi, Gronwall eşitsizliği bize istediğimiz sonucu veriyor. □

Not 7.1. *(7.27)'den görüyoruz ki $\epsilon\|\Delta w\|^2_{L^2(\Omega)}$ termini sol taraftaki $\alpha\lambda\|\Delta w\|_2^2$ terimi ile kontrol edebiliyoruz. Bu CGLE'ye özgü bir özellik olup, Schrödinger denkleminde bu özellik $\lambda = 0$ olduğundan yoktur [Cavalcanti vd., 2016].*

Şimdi, (7.25) ve (7.26)'dan

$$\|\widetilde{\gamma} F_t(u,w)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \le C\|F_t(u,w)\|_{H^1(\Omega)} \tag{7.28}$$

kestirimi çıkıyor. Ayrıca, (7.23)'ten, şunu elde ederiz:

$$\int_0^t \|F_t(u(s), u_t(s))\|_V\, ds \le C + C\int_0^t \|u(s)\|^2_{H^2(\Omega)}\, ds. \tag{7.29}$$

(7.29)'un sağ tarafı Lemma (7.1)'ya göre bir sabitle sınırlandırılabilir (çünkü $\lambda > 0$). Bunu (7.17) ile birleştirirsek,

$$\|(u,u_t)\|_{X_T} \le C$$

elde ederiz. Böylece, $\|(u,u_t)\|_{X_T}$ için $[0, T_{\max})$ üzerinde düzgün bir sınır elde etmiş oluyoruz. Yani, düzgün çözümlerin global varlığını göstermiş olduk.

8. **Zayıf Çözümler**

Bu bölümde, Teorem 2.7'de verilen zayıf çözümlerin varlık ve tekliğini göstereceğiz.

$$u_0 \in V \text{ such that } \gamma_0\varphi \in L^{p+1}(\Gamma_1)$$

alalım ve

$$\{u_{\mu,0}\}$$

yeterince düzgün öyle fonksiyonlar olsun ki

$$u_{\mu,0} \longrightarrow u_0 \quad Q\text{'da} \tag{8.30}$$

ve her $\mu \in \mathbb{N}$ için u_μ (2.15)'in $\{u_{\mu,0}\}$ başlangıç datasına karşılık gelen tek düzgün çözümü olsun. O zaman, u_μ aşağıdaki problemi çözer:

$$\begin{cases} \partial_t u_\mu - (\lambda + i\alpha)\Delta u_\mu + (\kappa + i\beta)|u_\mu|^{p-1} u_\mu - \gamma u_\mu = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial u_\mu}{\partial \nu} = -\partial_t u_\mu & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u_\mu = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ u_\mu(0) = u_{\mu,0} & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{8.31}$$

$\mu, \sigma \in \mathbb{N}$ için $z_{\mu,\sigma} := u_\mu - u_\sigma$ tanımını yapıyoruz. $\{z_{\mu,\sigma}\}$ için aşağıdaki sonucu kanıtlıyoruz:

Lemma 8.1. $E_{\mu,\sigma}$ (8.43)*'deki gibi tanımlanmış olsun, o zaman*

$$E_{\mu,\sigma}(t) \le E_{\mu,\sigma}(0)\exp(CT),\ t \in [0,T].$$

Kanıt. $G(z_{\mu,\sigma}) := |u_\mu|^{p-1} u_\mu - |u_\sigma|^{p-1} u_\sigma$ yazarsak, gözlemliyoruz ki

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(-\alpha\Delta z_{\mu,\sigma} + \beta G(z_{\mu,\sigma}), z'_{\mu,\sigma}) \\
&= Re\left(-\alpha\Delta z_{\mu,\sigma} + \beta G(z_{\mu,\sigma}), (\lambda + i\alpha)\Delta z_{\mu,\sigma} - (\kappa + i\beta) G(z_{\mu,\sigma}) + \gamma z_{\mu,\sigma}\right) \\
&= -\alpha\lambda\|\Delta z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\gamma\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} - \alpha\gamma Re\left(\frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial n}, z_{\mu,\sigma}\right)_{L^2(\Gamma_1)} - \kappa\beta\|G(z_{\mu,\sigma})\|_2^2 + \beta\gamma(G(z_{\mu,\sigma}), z_{\mu,\sigma}) \\
&\quad + \alpha Re(\Delta z_{\mu,\sigma}, (\kappa + i\beta)G(z_{\mu,\sigma})) + \beta Re(G(z_{\mu,\sigma}), (\lambda + i\alpha)\Delta z_{\mu,\sigma}) \\
&= -\alpha\lambda\|\Delta z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\gamma\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} - \alpha\gamma Re\left(\frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial n}, z_{\mu,\sigma}\right)_{L^2(\Gamma_1)} - \kappa\beta\|f(u)\|_2^2 + \beta\gamma(G(z_{\mu,\sigma}), z_{\mu,\sigma}) \\
&\quad - \alpha Re(\nabla z_{\mu,\sigma}, (\kappa + i\beta)\nabla G(z_{\mu,\sigma})) + \alpha\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial n}, (\kappa + i\beta)G(z_{\mu,\sigma})\right)_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\quad - \beta\,\mathrm{Re}\left(\nabla G(z_{\mu,\sigma})), (\lambda + i\alpha)\nabla z_{\mu,\sigma}\right) + \beta\,\mathrm{Re}\left(G(z_{\mu,\sigma}), (\lambda + i\alpha)\frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial n}\right)_{L^2(\Gamma_1)}.
\end{aligned} \tag{8.32}$$

Öte yandan, ortaya çıkıyor ki

$$\left|-\alpha\gamma Re\left(\frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial n}, z_{\mu,\sigma}\right)_{L^2(\Gamma_1)}\right| \leq \frac{\alpha\gamma}{2}\left|z'_{\mu,\sigma}, z_{\mu,\sigma})_{L^2(\Gamma_1)}\right| \tag{8.33}$$
$$\leq \alpha\gamma M \|z'_{\mu,\sigma}\|_{L^2(\Gamma_1)} \|z_{\mu,\sigma}\|_{L^2(\Gamma_1)}$$
$$\leq \frac{\alpha\gamma}{2}\left(C_{\epsilon_1}\|z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \epsilon_1\left\|z'_{\mu,\sigma}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right)$$
$$\leq \frac{\alpha\gamma}{2}\left(C_{\epsilon_1}\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon_1\left\|z'_{\mu,\sigma}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right).$$

Alternatif olarak, $\frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = -z'_{\mu,\sigma}$ olduğundan, şunu da yazabiliriz

$$-\alpha\gamma\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial n}, z_{\mu,\sigma}\right)_{L^2(\Gamma_1)} = \frac{\alpha\gamma}{2}\frac{d}{dt}\|z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}. \tag{8.34}$$

(8.35)

$$\mathrm{Re}(-\alpha\Delta z_{\mu,\sigma} + \beta G(z_{\mu,\sigma}), z'_{\mu,\sigma}) = \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} - \mathrm{Re}\left(\frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial n}, z'_{\mu,\sigma}\right)_{L^2(\Gamma_1)} + \mathrm{Re}(\beta G(z_{\mu,\sigma}), z'_{\mu,\sigma})$$
$$= \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|z'_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \mathrm{Re}(\beta G(z_{\mu,\sigma}), z'_{\mu,\sigma}).$$

Şimdi (7.22)'yi göz önüne alır, aşağıdaki lokal Lipschitz kestirimini kullanırsak:

$$\|G(z_{\mu,\sigma})\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\|u_\mu\|_{H^2}, \|u_\sigma\|_{H^2}\right)\|z_{\mu,\sigma}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|u_{\mu,0}\|_{H^2}, \|u_{\sigma,0}\|_{H^2}\right)\|z_{\mu,\sigma}\|_{L^2(\Omega)} \tag{8.36}$$

$$\|G(z_{\mu,\sigma})\|_V \leq \left(\|u_\mu\|_{H^2}, \|u_\sigma\|_{H^2}\right)\|z_{\mu,\sigma}\|_V \leq C\left(\|u_{\mu,0}\|_{H^2}, \|u_{\sigma,0}\|_{H^2}\right)\|z_{\mu,\sigma}\|_V, \tag{8.37}$$

elde ederiz ki

$$\mathrm{Re}(-\alpha\Delta z_{\mu,\sigma} + \beta G(z_{\mu,\sigma}), z'_{\mu,\sigma}) = \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|z'_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \mathrm{Re}(\beta G(z_{\mu,\sigma}), z'_{\mu,\sigma}) \tag{8.38}$$
$$\leq \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|z'_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \beta C'\|\nabla G(z_{\mu,\sigma})\|_{L^2(\Omega)}\|z'_{\mu,\sigma}\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|z'_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \beta C_{\epsilon_2}\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta C\epsilon_2\left[\|\Delta z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|G(z_{\mu,\sigma})\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z_{\mu,\sigma}\|^2_V\right]$$

(8.39)

$$-\alpha Re(\nabla z_{\mu,\sigma}, (\kappa+i\beta)\nabla G(z_{\mu,\sigma})) - \beta Re(\nabla G(z_{\mu,\sigma}), (\lambda+i\alpha)\nabla z_{\mu,\sigma}) = -(\alpha\kappa+\beta\lambda)Re(\nabla(G(z_{\mu,\sigma})), \nabla z_{\mu,\sigma})$$
$$\leq |\alpha\kappa+\beta\lambda| Re(\nabla G(z_{\mu,\sigma}), \nabla z_{\mu,\sigma})$$
$$\leq |\alpha\kappa+\beta\lambda|\,\|G(z_{\mu,\sigma})\|_V\,\|z_{\mu,\sigma}\|_V \leq C_1\,\|z_{\mu,\sigma}\|^2_V$$

ve

(8.40)
$$|\beta\gamma(G(z_{\mu,\sigma}),z_{\mu,\sigma})| \le \beta\,\gamma\,C_2\,\|z_{\mu,\sigma}\|_V^2.$$

(8.41)
$$\begin{aligned}
&\alpha\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial n},(\kappa+i\beta)G(z_{\mu,\sigma})\right)_{L^2(\Gamma_1)} + \beta\,\mathrm{Re}\left(G(z_{\mu,\sigma}),(\lambda+i\alpha)\frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial n}\right)_{L^2(\Gamma_1)}\\
&= (\alpha\kappa+\beta\lambda)\,\mathrm{Re}\left(G(z_{\mu,\sigma}),\frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial n}\right)_{L^2(\Gamma_1)}\\
&\le |\alpha\kappa+\beta\lambda|\left(C_{\epsilon_3}\|G(z_{\mu,\sigma})\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \epsilon_3\left\|z'_{\mu,\sigma}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right)\\
&\le |\alpha\kappa+\beta\lambda|\left(C_{\epsilon_3}\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon_3\left\|z'_{\mu,\sigma}\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right).
\end{aligned}$$

Yukarıda verilen kestirimlerden,

(8.42)
$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\left(1-\frac{\gamma\,\epsilon_1}{2}-|\alpha\kappa+\beta\lambda|\epsilon_3\right)\|z'_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\\
&\quad+(\alpha\lambda-\beta\,C\,\epsilon_2)\,\|\Delta z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + (\kappa\beta-\beta\,C\,\epsilon_2)\|G(z_{\mu,\sigma})\|_2^2\\
&\quad\le C\,\|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

olduğu çıkar. ϵ_i, $i=1,2,3$ yeterince küçük seçersek ve (8.42)'yi $[0,T]$ üzerinde integre edersek,

$$E_{\mu,\sigma}(t) \le CE_{\mu,\sigma}(0) + C\int_0^t E_{\mu,\sigma}(s)ds.$$

Burada

(8.43)
$$E_{\mu,\sigma}(t) := \|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_1\int_0^t \|z'_{\mu,\sigma}(s)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\,ds + C_2\int_0^t \|\Delta z_{\mu,\sigma}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds$$

Şimdi Gronwall eşitsizliğini kullanarak, $t\in[0,T]$ için

(8.44)
$$E_{\mu,\sigma}(t) \le E_{\mu,\sigma}(0)\exp(CT)$$

olduğu sonucuna varırız. □

(8.30) ve Lemma 8.1'den söyleyebiliriz ki, öyle bir u fonksiyonu vardır ve her $T>0$ için,

(8.45) $u_\mu \longrightarrow u$ $\quad C([0,T];V)\hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$'da,

(8.46) $u'_\mu \longrightarrow u'$ $\quad L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$'da,

(8.47) $\Delta u_\mu \longrightarrow \Delta u$ $\quad L^2(0,T;L^2(\Omega))$'da.

Ayrıca, (7.22), (8.45) ve(8.47)'den,

$$u_\mu \longrightarrow u \qquad L^2(0,T;H^2(\Omega))\text{'da} \tag{8.48}$$

elde ederiz.

Yukarıdaki yakınsaklık özelliklerinden, u'nun Tanım 2.1'i sağlayan bir zayıf çözüm olduğu ortaya çıkıyor.

Şimdi u_1 ve u_2 (1.1)'in iki çözümü olsun. O zaman $w = u_1 - u_2$ aşağıdaki problemi çözer

$$\begin{cases} w_t - (\lambda + i\alpha)\Delta w + (\kappa + i\beta)\big(|u_1|^{p-1}u_1 - |u_2|^{p-1}u_2\big) - \gamma w = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = -w_t & \text{on } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ w = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ w(0) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{8.49}$$

$w \in H^2(\Omega)$ ve $w_t \in L^2(\Omega)$, h.h. $t \in [0,T]$ olduğundan, Lemma 8.1'deki prosecürü tekrar edersek h.h. $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ için $w = 0$ elde ederiz.

9. **Inviskit Limit**

Bu bölümde, Teorem 2.8 ve 2.9'u kanıtlayacağız. Bu teoremler CGLE'nin dinamik sınır koşulları altındaki çözümlerinin NLS'in aynı sınır koşulları altındaki çözümlerine $\epsilon = (\lambda,\kappa) \to 0$ olduğu durumda uygun bir manada yakınsadığını söylemektedir.

Lemma 7.1'den u_ϵ'nun $L^\infty(0,T;V)$'de düzgün sınırlı, $\partial_t u_\epsilon$'un $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$'de düzgün sınırlı ve $|u_\epsilon|^{p-1}u_\epsilon$'un $L^\infty(0,T;L^{(p+1)'}(\Omega))$'da düzgün sınırlı olduğunu biliyoruz. Ana denklemi ve yine Lemma 7.1'i kullanırsak, $\partial_t u_\epsilon$'un $L^2(0,T;V')$'da düzgün sınırlı olduğunu görürüz. Bu sınırlandırmalardan, u_ϵ'un bir alt dizisi için (hala aynı şekilde yazılan)

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \qquad \text{zayıf-* } L^\infty(0,T;V)\text{'de;} \tag{9.50}$$

$$\partial_t u_\epsilon \rightharpoonup u_t \qquad \text{zayıf } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))\text{'de;} \tag{9.51}$$

$$\partial_t u_\epsilon \rightharpoonup u_t \qquad \text{zayıf } L^2(0,T;V')\text{'da;} \tag{9.52}$$

$$|u_\epsilon|^{p-1}u_\epsilon \rightharpoonup \xi \qquad \text{zayıf-* } L^\infty(0,T;L^{(p+1)'}(\Omega))\text{'da.} \tag{9.53}$$

$X \equiv \{u \in L^2(0,T;V) \,|\, u_t \in L^2(0,T;V')\}$'teki sınırlı kümelerin $L^2(0,T;L^2(\Omega))$'da görece kompakt olduğunu hatırlayalım. Bu yüzden, farzedebiliriz ki $u_\epsilon \to u$ $L^2(0,T;L^2(\Omega))$'da ve $u_\epsilon \to u$ h.h. $(0,T)\times\Omega$'da. Buradan çıkıyor ki $|u_\epsilon|^{p-1}u_\epsilon \to |u|^{p-1}u$ h.h. $(0,T)\times\Omega$'da. Ama $|u_\epsilon|^{p-1}u_\epsilon$'nun

$L^\infty(0,T;L^{(p+1)'}(\Omega))$'da sınırlı olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $\xi \equiv |u|^{p-1}u$. Şimdi, $\epsilon \to 0$ durumunu düşünürsek, u'nun NLS için idbvp'yi çözdüğünü görürüz. Böylece Teorem 2.8'in kanıtını tamamlamış olduk.

Theorem 2.9'u, $N=2$, $p=3$ ve $\beta>0$ durumunda düşünüyoruz çünkü sadece bu durumda NLS için idbvp'nin bir global düzgün çözümü olduğunu biliyoruz [Cavalcanti vd., 2016]. Bu bağlamda, diyelim ki u_ϵ (2.15)'in $u_\epsilon(0)=u_\epsilon^0$ başlangıç datası ile global düzgün çözümüdür. Varsayalım ki u da aşağıdaki kübik defocusing NLS'in dinamik sınır koşulları altındaki global düzgün çözümüdür ($\alpha,\beta>0$):

$$\begin{cases} u_t - i\alpha\Delta u + i\beta|u|^2u - \gamma u = 0 & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = -u_t & \text{on } \Gamma_1\times(0,T),\\ u=0 & \text{on } \Gamma_0\times(0,T),\\ u(0)=u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{9.54}$$

Ayrıca, $\epsilon\to 0$ olduğundan V'de $u_\epsilon^0 \to u_0$ olduğunu varsayalım.

$w = u_\epsilon - u$ olsun. O zaman, w aşağıdaki problemi çözer:

$$\begin{cases} w_t - i\alpha\Delta w + i\beta\left(|u_\epsilon|^2u_\epsilon - |u|^2u\right) - \gamma w - \lambda\Delta u_\epsilon + \kappa|u_\epsilon|^2u_\epsilon = 0 & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial w}{\partial\nu} = -w_t & \text{on } \Gamma_1\times(0,T),\\ w=0 & \text{on } \Gamma_0\times(0,T),\\ w(0)=w_0^\epsilon \equiv u_\epsilon^0 - u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{9.55}$$

(9.55)'i $-\Delta\bar{w}$ ile çarpıyoruz, $\Omega\times(0,t)$ üzerinde integre ediyoruz ve reel kısımları alıyoruz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \int_0^t \|w_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)}ds + \beta\mathrm{Im}\int_0^t (|u_\epsilon|^2u_\epsilon - |u|^2u, \Delta w)_{L^2(\Omega)}ds \\ &- \gamma\int_0^t \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \gamma\int_0^t \mathrm{Re}(w,\partial_\nu w)_{L^2(\Gamma_1)}ds + \lambda\mathrm{Re}\int_0^t(\Delta u_\epsilon,\Delta w)_{L^2(\Omega)}ds \\ &- \kappa\int_0^t \mathrm{Re}(|u_\epsilon|^2u_\epsilon,\Delta w)_{L^2(\Omega)}ds = \frac{1}{2}\|\nabla w_0^\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{9.56}$$

Sınır terimlerini kullanarak,

$$\frac{\gamma}{2}\mathrm{Re}(w,\partial_\nu w)_{L^2(\Gamma_1)} \le \frac{1}{2}\|w_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{\gamma^2}{8}\|w\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \le \frac{1}{2}\|w_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{C\gamma^2}{8}\|w\|^2_V \tag{9.57}$$

elde ediyoruz ki buradaki son eşitsizlik iz teorisinden gelmektedir. Öte yandan,

$$(9.58)\quad \beta\mathrm{Re}\int_0^t (|u_\epsilon|^2u_\epsilon - |u|^2u, \Delta w)_{L^2(\Omega)}ds$$
$$= -\beta\mathrm{Re}\int_0^t \left(\nabla\left(|u_\epsilon|^2u_\epsilon - |u|^2u\right), \nabla w\right)_{L^2(\Omega)}ds + \beta\mathrm{Re}\int_0^t (|u_\epsilon|^2u_\epsilon - |u|^2u, \frac{\partial w}{\partial\nu})_{L^2(\Gamma_1)}ds$$
$$\leq \beta\int_0^t \|\nabla\left(|u_\epsilon|^2u_\epsilon - |u|^2u\right)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|w_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)}ds$$
$$+ \frac{\beta^2}{2}\int_0^t \||u_\epsilon|^2u_\epsilon - |u|^2u\|^2_{L^2(\Gamma_1)}ds.$$

[Özsarı, 2015, Lemma 3.3])’deki hesaplamaları biraz değiştirerek ispat etmek mümkündür ki:

$$(9.59)\quad \|\nabla\left(|u_\epsilon|^2u_\epsilon - |u|^2u\right)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u_\epsilon - u\|_{L^2(\Omega)}(\|u_\epsilon\|_\infty + \|u\|_\infty)^2$$
$$+ C\|u_\epsilon - u\|_4(\|u_\epsilon\|_\infty + \|u\|_\infty)(\|\nabla u_\epsilon\|_4 + \|\nabla u\|_4)$$
$$\leq C\|u_\epsilon - u\|_V\left(\|u_\epsilon\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{H^2(\Omega)}\right)^2$$
$$+ C\|u_\epsilon - u\|_V\left(\|u_\epsilon\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{H^2(\Omega)}\right)\left(\|u_\epsilon\|^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}\|u_\epsilon\|^{\frac{1}{2}}_V + \|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_V\right)$$
$$\leq C\|w\|_V.$$

Yukarıda ikinci eşitsizlik $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ $(N = 2)$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ $(N = 2)$ ve (7.12)’deki Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğinden çıkıyor . Son eşitsizlik $u_\epsilon, u \in C([0,T]; V\cap H^2(\Omega))$ olduğundan çıkıyor.

[Özsarı, 2015, Lemma 3.3])’deki aynı tekniği kullanarak, ayrıca aşağıdaki kestirimi elde ediyoruz

$$(9.60)\quad \frac{\beta^2}{2}\||u_\epsilon|^2u_\epsilon - |u|^2u\|^2_{L^2(\Gamma_1)}$$
$$\leq C\left(\|u_\epsilon\|^4_{L^\infty(\Gamma_1)} + \|u\|^4_{L^\infty(\Gamma_1)}\right)\|u_\epsilon - u\|^2_{L^2(\Gamma_1)}$$
$$\leq C\left(\|u_\epsilon\|^4_{H^1(\Gamma_1)} + \|u\|^4_{H^1(\Gamma_1)}\right)\|u_\epsilon - u\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq C\left(\|u_\epsilon\|^4_{H^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \|u\|^4_{H^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\right)\|u_\epsilon - u\|^2_{L^2(\Gamma_1)}$$
$$\leq C\left(\|u_\epsilon\|^4_{H^2(\Omega)} + \|u\|^4_{H^2(\Omega)}\right)\|u_\epsilon - u\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq C\|w\|^2_V.$$

Yukarıda ikinci eşitsizlik $H^1(\Gamma_1) \hookrightarrow L^\infty(\Gamma_1)$ (Γ_1 1-boyutlu manifold) olduğundan, üçüncü eşitsizlik Sobolev iz teorisinden, ve son eşitsizlik $u, u_\epsilon \in C([0,T]; H^2(\Omega))$ olduğundan ve yine iz teorisinden çıkıyor.

(9.56)-(9.60)’i birleştirirsek,

$$\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{2}\|\nabla w^\epsilon_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^T \|w(t)\|^2_V dt + \lambda\|\Delta u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} + \kappa\|u_\epsilon\|^3_{L^6(\Omega)}\|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} ds \tag{9.61}$$

elde ederiz.

Yukarıdaki eşitsizlikte $\|u_\epsilon\|_{L^6(\Omega)}$, $\|\Delta w\|_{L^2(\Omega)}$, ve $\|\Delta u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}$ bir sabitle sınırlandırılabilir çünkü $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ ve $u_\epsilon, u \in C([0,T]; H^2(\Omega))$. Böylece (9.61)'den

$$\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|u^0_\epsilon - u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + (\lambda+\kappa)C + C\int_0^T \|w(t)\|^2_V dt \tag{9.62}$$

elde ederiz.

Gronwall eşitsizliğini kullanırsak

$$\|u_\epsilon - u\|^2_V \le \|u^0_\epsilon - u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + (\lambda+\kappa)C\exp(CT).$$

Sonuç olarak, $\epsilon = (\lambda,\kappa) \to 0$ için

$$\|u_\epsilon - u\|_V = O(\lambda) + O(\kappa)$$

olduğunu kanıtlamış olduk.

10. **Çözümlerin Uzun-zaman Davranışı**

Bu bölümde, Teorem 2.10 ve (2.11)'i kanıtlayacağız. Önce kolay olan ($\gamma < 0$) durumunu, sonra daha zor olan $\gamma = 0$ durumunu inceleyeceğiz. Zayıf çözümler teorisinden biliyoruz ki (2.15) problemi için verilen

$$u_0 \in Q \equiv \{\varphi \in V \cap L^{p+1}(\Omega) \text{ such that } \gamma_0\varphi \in L^{p+1}(\Gamma_1)\}$$

için, bu dataya karşılık gelen tek bir global u zayıf çözümü vardır. İddia ediyoruk ki bu çözüm $H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$'de $t \to \infty$ için üssel bir hızda sıfıra gider. Bunu kanıtlamak için çarpan tekniğini kullanacağız, ancak $\gamma = 0$ özel bir çarpan kullanımını gerektiriyor.

1.Durum ($\gamma < 0$):

Aşağıdaki gibi tanımlanmış fonksiyoneli düşünüyoruz

$$F(t) \equiv \frac{\alpha}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{p+1}\|u(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}.$$

Dikkat edilirse 7.2'den $F(t) \leq E(t)$ olduğunu görürüz. Ayrıca, (7.11)'den

$$F(t) \leq E(0) + \gamma \int_0^t F(s)ds. \tag{10.63}$$

Gronwall eşitsizliğinden $t \geq 0$ için:

$$F(t) \leq E_0 e^{-|\gamma| t} \tag{10.64}$$

olur. Burada

$$E_0 = E(0) = \frac{\alpha}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{p+1}\|u_0\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} - \frac{\alpha\gamma}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{1}{p+1}(\alpha\kappa + \beta\lambda)\|u_0\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Gamma_1)} \geq 0. \tag{10.65}$$

Bu çözümlerin, $\gamma < 0$ olduğu durumda, $H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ mertebesinde sıfıra üssel hızda yakınsadığını gösteriyor.

2.Durum ($\gamma = 0$):

Bu durum daha zor ve bazı kontrol teori araçlarının kullanımını zorunlu kılıyor. CGLE'nin çözümlerinin periyodik ya da homojen Dirichlet/Neumann sınır koşulları alrında $\gamma \geq 0$ olduğunda azalmak zorunda olmadığını biliyoruz. Biz burada dinamik sınır koşulunun aslında sönümleyici bir etki yarattığını ve aslında sistemi bölgenin içinden bir sönüm mekanizması olmadan kararlılaştırabildiğini gösteriyoruz. Bu yüzden, $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = -u_t$ sınır koşulunu bu kapsamda kararlılaştırıcı bir sınır geri beslemesi olarak düşünebiliriz.

Lemma 7.1'e dikkat edilecek olursa $\gamma = 0$ olduğunda, enerjinin artmayan bir özelliğe sahip olduğunu görürüz. Kararlılaştırma sonucunu kanıtlamak için, aşağıdaki lemmada verilen integral eşitsizliği kullanacağız.

Lemma 10.1. *[Komornik, 1994, Teorem 8.1] $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ artmayan bir fonksiyon olsun ve varsayalım ki bir $C > 0$ sabiti için*

$$\int_t^\infty F(s)ds \leq CF(t) \tag{10.66}$$

$t \geq 0$ için geçerlidir. O zaman,

$$F(t) \leq F(0)e^{1-\frac{t}{C}}$$

$t \geq 0$ için doğrudur.

(10.66) türünde bir integral eşitsizliği elde etmek için,

$$\frac{d}{dt}(u, q \cdot \nabla u)_{L^2(\Omega)}, \tag{10.67}$$

terimini hesaplayacağız. Bu terim kısmi diferansiyel denklemlerin kontrol teorisinde ve homojen olmayan başlangıç-sınır değer problemlerinin iyi-konulmuşluk teorisinde kullanılan bir çarpandır. (10.67)'de, q Ω'da yeterince düzgün bir vektör alanı temsil ediyor ve bu vektör alanı daha sonra özel bir şekilde seçilecektir. Öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 10.2. *u (2.15)'in global bir zayıf çözümü olsun ve $q \in \left[C^2(\bar{\Omega})\right]^n$ Ω üzerinde tanımlı reel bir vektör alanı olsun. O zaman, aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(u, q \cdot \nabla u)_{L^2(\Omega)} - \int_\Gamma (q \cdot \nu) u \bar{u}_t d\Gamma - (\kappa - i\beta) \int_\Omega div(q)|u|^{p+1} dx \\
(\lambda - i\alpha) \int_\Gamma div(q) u \partial_\nu \bar{u} d\Gamma - \lambda \int_\Omega ((\nabla(div(q) \cdot \nabla \bar{u}) u + div(q)|\nabla u|^2)) dx \\
= 2i\lambda Im(\Delta u, q \cdot \nabla u) - 2i\kappa Im(|u|^{p-1} u, q \cdot \nabla u) + 2i\alpha \int_\Gamma (\partial_\nu u)(q \cdot \nabla \bar{u}) d\Gamma \\
- 2i\alpha Re \sum_{m,j=1}^n ((\partial_{x_m} q_j) u_{x_m}, u_{x_j}) - i\alpha \int_\Gamma (q \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma \\
- \frac{2}{p+1} i\beta \int_\Gamma (q \cdot n)|u|^{p+1} d\Gamma + \frac{2}{p+1} i\beta \int_\Omega div(q)|u|^{p+1} dx.
\end{aligned} \tag{10.68}$$

Kanıt. Bu lemmanın kanıtı [Gao ve Bu, 2004, Lemma 2.1]'in ispatını biraz değiştirerek yapılabilir. Burada kanıt kısmi integrasyon, basit ama uzun hesaplamalara dayalıdır. O yüzden burada ihmal edilmiştir. □

$q = x - x_0$ seçelim. O zaman, Teorem 2.11'de Ω'nın sınırında verilen geometrik varsayımlardan, Γ_1'de $q \cdot \nu > 0$ ve Γ_0'da $q \cdot \nu \leq 0$. Basitçe hesaplayabilirz ki $div(q) = N$. $u|_{\Gamma_0} \equiv 0$ olduğundan, $\nabla u|_{\Gamma_0} = (\partial_\nu u)\nu$ olduğunu gözlemlemek önemlidir. Şimdi, yukarıda yazdıklarımızı ve Lemma 10.2'yi kullanarak, şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
2\alpha \int_t^T \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{N\beta(p-1)}{p+1} \int_t^T \|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} dt \leq C(\|u(T)\|^2_V + \|u(t)\|^2_V) + \epsilon \int_t^T \|u\|^2_V dt \\
+ C_\epsilon \int_t^T \left(\|u_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)} dt + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \right).
\end{aligned} \tag{10.69}$$

Fakat Lemma 7.1'den biliyoruk ki

$$\int_t^T \left(\|u_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)} dt + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \right) \leq C(F(t) - F(T)).$$

Son eşitsizliği (10.69) ile birleştirirsek,

$$\int_t^T F(t)dt \leq CF(T) + C(F(t) - F(T)) \leq CF(t)$$

çıkar. Böylece

$$\int_t^\infty F(t)dt \leq CF(t)$$

$t \geq 0$ için geçerlidir. Şimdi, Lemma 10.1'den, üssel anlamda sıfıra yakınsama çıkıyor ve Teorem 2.11'in kanıtını tamamlamış oluyoruz.

11. **Sonuç**

Burada sunmuş olduğumuz çalışma literatürde karmaşık Ginzburg-Landau denklemlerini dinamik sınır koşulları ile inceleyen ilk çalışma olma özelliğini taşıyor. Literatürde dinamik sınır koşulları için ya da genel olarak başlangıç-sınır değer problemleri için kullanılan pek çok yöntem burada incelenen modele kolay bir şekilde uygulanamıyor. Bu yüzden, bu çalışmada yürütülen analiz oldukça ilginçti. Bu tür problemlerde karşılaşılan en büyük zorluklardan bir tanesi L^2-mertebesinde bir konzervasyon ya da kontrol olmamasıdır. Bu bizim modelimizde doğrusal denklem ile uğraşmayı bile oldukça zorlaştırıyor. Yakın zamanda, CGLE'ye akraba olan NLS denklemleri dinamik sınır koşulları altında düşünülmüştü. Burada yaptığımız çalışmada NLS için elde edilen sonuçlara göre, CGLE kapsamında, NLS'de var olmayan evolüsyon operatörünün düzgünleştirici etkisinden faydalanıp daha iyi düzgünlük sonuçları elde edebildik. Ayrıca CGLE çözümlerinden NLS çözümlerine inviskit limit ile geçişin mümkün olduğunu gösterebildik, bu bir anlamda NLS problemlerini dinamik sınır koşulları altında çalışmak için alternatif bir yöntem sunmuş oldu.

Buradaki çalışma konuya başlangıç niteliğinde düşünülebilir ve aslında ortaya parametrelere bağlı olarak pek çok açık problem çıkmıştır. Bu problemlerden en ilginci hem NLS hem de CGLE için focusing tarzdaki modellerin incelenmesidir. Bizim incelediğimiz problemde frekansın işaretini pozitif seçmek bir anlamda defocusing tarzda bir problem incelemeye denk oldu ve enerji kestirimlerinde doğrusal olmayan terimler absorbe edilebildi. Genelde focusing tarzdaki başlangıç-sınır değer problemlerinde bilinen en önemli yöntem L^2-mertebesinde konzervasyon ya da kontrol bilgisini Gagliardo-Nirenberg tarzı kestirimlerle birleştirip doğrusal olmayan terimleri en azından küçük başlangıç datası için kontrol etmektir. Ancak bu yöntem L^2-mertebesinde, yukarıdaki paragrafta bahsettiğimiz eksiklikten dolayı dinamik sınır koşullu problem için çökmektedir.

Kaynaklar

Aamo, O. M., Smyshlyaev, A., ve Krstić, M. (2005). Boundary control of the linearized Ginzburg-Landau model of vortex shedding. *SIAM J. Control Optim.*, 43(6):1953–1971.

Aamo, O. M., Smyshlyaev, A., Krstić, M., ve Foss, B. A. (2007). Output feedback boundary control of a Ginzburg-Landau model of vortex shedding. *IEEE Trans. Automat. Control*, 52(4):742–748.

Aranson, I. S. ve Kramer, L. (2002). The world of the complex Ginzburg-Landau equation. *Rev. Modern Phys.*, 74(1):99–143.

Audiard, C. (2013). On the non-homogeneous boundary value problem for Schrödinger equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(9):3861–3884.

Audiard, C. (2015). On the boundary value problem for the Schrödinger equation: compatibility conditions and global existence. *Anal. PDE*, 8(5):1113–1143.

Batal, A. ve Özsarı, T. (2016). Nonlinear Schrödinger equations on the half-line with nonlinear boundary conditions. *Electron. J. Differential Equations*, pages Paper No. 222, 20.

Bechouche, P. ve Jüngel, A. (2000). Inviscid limits of the complex Ginzburg-Landau equation. *Comm. Math. Phys.*, 214(1):201–226.

Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York.

Brézis, H. ve Gallouet, T. (1980). Nonlinear Schrödinger evolution equations. *Nonlinear Anal.*, 4(4):677–681.

Cavalcanti, M. M., Corrêa, W. J., Lasiecka, I., ve Lefler, C. (2016). Well-posedness and uniform stability for nonlinear Schrödinger equations with dynamic/Wentzell boundary conditions. *Indiana Univ. Math. J.*, 65(5):1445–1502.

Cavalcanti, M. M., Lasiecka, I., ve Toundykov, D. (2012). Wave equation with damping affecting only a subset of static Wentzell boundary is uniformly stable. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(11):5693–5713.

Cazenave, T., Dickstein, F., ve Weissler, F. B. (2013). Finite-time blowup for a complex Ginzburg-Landau equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 45(1):244–266.

Clément, P., Okazawa, N., Sobajima, M., ve Yokota, T. (2012). A simple approach to the Cauchy problem for complex Ginzburg-Landau equations by compactness methods. *J. Differential Equations*, 253(4):1250–1263.

Doering, C. R., Gibbon, J. D., ve Levermore, C. D. (1994). Weak and strong solutions of the complex Ginzburg-Landau equation. *Phys. D*, 71(3):285–318.

Erdoğan, M. B. ve Tzirakis, N. (2016). Regularity properties of the cubic nonlinear Schrödinger equation on the half line. *J. Funct. Anal.*, 271(9):2539–2568.

Favini, A., Goldstein, G. R., Goldstein, J. A., ve Romanelli, S. (2000). C_0-semigroups generated by second order differential operators with general Wentzell boundary conditions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(7):1981–1989.

Favini, A., Goldstein, G. R., Goldstein, J. A., ve Romanelli, S. (2002). The heat equation with generalized Wentzell boundary condition. *J. Evol. Equ.*, 2(1):1–19.

Fokas, A. S., Himonas, A. A., ve Mantzavinos, D. (2017). The nonlinear Schrödinger equation on the half-line. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369(1):681–709.

Gao, H. ve Bu, C. (2004). Dirichlet inhomogeneous boundary value problem for the $n+1$ complex Ginzburg-Landau equation. *J. Differential Equations*, 198(1):176–195.

Gao, H., Gu, X., ve Bu, C. (2003). A Neumann boundary value problem for a generalized Ginzburg-Landau equation. *Appl. Math. Comput.*, 134(2-3):553–560.

Ginibre, J. ve Velo, G. (1996). The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation. I. Compactness methods. *Phys. D*, 95(3-4):191–228.

Ginibre, J. ve Velo, G. (1997). The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation. II. Contraction methods. *Comm. Math. Phys.*, 187(1):45–79.

Holmer, J. (2005). The initial-boundary-value problem for the 1D nonlinear Schrödinger equation on the half-line. *Differential Integral Equations*, 18(6):647–668.

Kaikina, E. I. (2013). Inhomogeneous Neumann initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation. *J. Differential Equations*, 255(10):3338–3356.

Kalantarov, V. K. ve Özsarı, T. (2016). Qualitative properties of solutions for nonlinear Schrödinger equations with nonlinear boundary conditions on the half-line. *J. Math. Phys.*, 57(2):021511, 14.

Komornik, V. (1994). *Exact controllability and stabilization.* RAM: Research in Applied Mathematics. Masson, Paris; John Wiley & Sons, Ltd., Chichester. The multiplier method.

Lasiecka, I. ve Tataru, D. (1993). Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping. *Differential Integral Equations*, 6(3):507–533.

Lasiecka, I. ve Triggiani, R. (1992). Optimal regularity, exact controllability and uniform stabilization of Schrödinger equations with Dirichlet control. *Differential Integral Equations*, 5(3):521–535.

Lasiecka, I. ve Triggiani, R. (2006). Well-posedness and sharp uniform decay rates at the $L_2(\Omega)$-level of the Schrödinger equation with nonlinear boundary dissipation. *J. Evol. Equ.*, 6(3):485–537.

Lions, J.-L. ve Magenes, E. (1968). *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris.

Masmoudi, N. ve Zaag, H. (2008). Blow-up profile for the complex Ginzburg-Landau equation. *J. Funct. Anal.*, 255(7):1613–1666.

Ogawa, T. ve Yokota, T. (2004). Uniqueness and inviscid limits of solutions for the complex Ginzburg-Landau equation in a two-dimensional domain. *Comm. Math. Phys.*, 245(1):105–121.

Okazawa, N. (2006). Smoothing effect and strong L^2-wellposedness in the complex Ginzburg-Landau equation. In *Differential equations: inverse and direct problems*, volume 251 of *Lect. Notes Pure Appl. Math.*, pages 265–288. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

Okazawa, N. ve Yokota, T. (2002). Monotonicity method applied to the complex Ginzburg-Landau and related equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 267(1):247–263.

Özsarı, T. (2015). Well-posedness for nonlinear Schrödinger equations with boundary forces in low dimensions by Strichartz estimates. *J. Math. Anal. Appl.*, 424(1):487–508.

Özsarı, T., Kalantarov, V. K., ve Lasiecka, I. (2011). Uniform decay rates for the energy of weakly damped defocusing semilinear Schrödinger equations with inhomogeneous Dirichlet boundary control. *J. Differential Equations*, 251(7):1841–1863.

Pazy, A. (1983). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York.

Rosier, L. ve Zhang, B.-Y. (2009). Null controllability of the complex Ginzburg-Landau equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(2):649–673.

Shimotsuma, D., Yokota, T., ve Yoshii, K. (2014). Cauchy problem for the complex Ginzburg-Landau type equation with L^p-initial data. *Math. Bohem.*, 139(2):353–361.

Shimotsuma, D., Yokota, T., ve Yoshii, K. (2016). Existence and decay estimates of solutions to complex Ginzburg-Landau type equations. *J. Differential Equations*, 260(3):3119–3149.

Showalter, R. E. (1997). *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, volume 49 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI.

Strauss, W. ve Bu, C. (2001). An inhomogeneous boundary value problem for nonlinear Schrödinger equations. *J. Differential Equations*, 173(1):79–91.

Tang, Q. ve Wang, S. (1995). Time dependent Ginzburg-Landau equations of superconductivity. *Phys. D*, 88(3-4):139–166.

Ventcelʹ, A. D. (1959). On boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes. *Theor. Probability Appl.*, 4:164–177.

Wu, J. (1998). The inviscid limit of the complex Ginzburg-Landau equation. *J. Differential Equations*, 142(2):413–433.

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Yrd. Doç. Dr. TÜRKER ÖZSARI
Proje No:	115F055
Proje Başlığı:	Ginzburg-Landau Denklemlerinin Dinamik Sınır Koşulları Altında Çözümlerinin Analizi
Proje Türü:	3501 - Kariyer
Proje Süresi:	18
Araştırmacılar:	
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	İZMİR YÜKSEK TEKNOLOJİ ENS. FEN F. MATEMATİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	01/10/2015 - 01/04/2017
Onaylanan Bütçe:	207675.0
Harcanan Bütçe:	90325.24
Öz:	Karmaşık Ginzburg-Landau denklemleri (CGLE) için başlangıç dinamik sınır değer problemlerini (idbvp) R^N'in sonlu bölgelerinde, verilen matematiksel modeli Wentzell başlangıç-sınır değer problemine (ibvp) çevirerek çalışıyoruz. İlk önce doğrusal homojen idbvp?yi düşünüyoruz. İkinci olarak bölgenin içinde ve sınırında forcing olduğu doğrusal modeli çalışıyoruz. Daha sonra, doğrusal olmayan idbvp?yi bölgenin içinde Lipschitz tipindeki, sınırında uygun bir manada monotone terimlerle analiz ediyoruz. Kuvvet tipindeki doğrusal olmayan terimlerle yazılan CGLE idbvp için lokal iyi konulmuşluk problemini sabit nokta teorisini kullanarak çözüyoruz. Düzgün çözümler için global iyi konulmuşluğu elde ediyoruz. Zayıf çözümlerin varlığı ve tekliğini kanıtlıyoruz. Evolüsyon operatörünün düzgünleştirici etkisini kanıtlıyoruz. Bu literatürde doğrusal olmayan Schrödinger denklemleri için elde edilen sonuçlardan daha iyi sonuçlar elde edilmesine olanak tanıyor. Çalışmamızın en ilginç sonuçlarından biri dinamik sınır koşulları altında düşünülen doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin çözümlerinin aynı sınır koşullarına maruz CGLE?nin çözümlerinin inviskid limiti olarak elde edilebileceğinin kanıtlanmasıdır. Son olarak, çözümlerin uzun zaman davranışlarını karakterize ediyoruz ve çözümlerin enerjisinin üssel hızda sıfıra yaklaştığını kontrol teorisinin yöntemlerini kullanarak ispatlıyoruz.
Anahtar Kelimeler:	Ginzburg-Landau, dinamik/Wentzell sınır koşulu, düzgün/zayıf çözüm, inviskit limit, kararlılaştırma
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır