Genel Dispersiyona Sahip Doğrusal Olmayan İntegrallenebilen Sistemler ve Dinamik Kuantum Simetrileri

Program Kodu: 1001
Proje No: 116F206

Proje Yürütücüsü:
Prof. Dr. Oktay K Pashaev
Araştırmacı
Prof.Dr. Şirin Atılgan Büyükaşık

NİSAN 2019
İzmir

Önsöz

Bu projede, keyfi ve q-deforme olmuş dispersiyona sahip doğrusal olmayan yeni integrallenebilir sistemler ve tam çözülebilen dinamik quantum simetrilerine sahip kuantum modellerin hiyerarşisi inşa edildi.

Projenin gerçekleşmesi için yardımcı olan techizat, konferans desteği ve öğrenci bursları Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından sağlanmıştır. TÜBİTAK'a 116F206 nolu projemizi 24 ay boyunca desteklediği için teşekkür ederiz.

Yürütücü:
Prof. Dr. Oktay Pashaev
Araştırmacı:
Prof. Dr. Şirin Atılgan Büyükaşık
Bursiyerler:
1. Tuğçe Parlakgörür
2. Osman Çetintaş
3. Kıvılcım Alkan Acar
4. Onur Sığınç

Projeden desteklenmeyen diğer araştırmacılar:
1. Aygül Koçak
2. Dr. Şengül Nalcı Tümer

Proje Kapsamında Basılan Bilimsel Yayınlar, Tezler ve Sunumlar

0.1 Makaleler, Bildiriler ve Yüksek Lisans Tezleri

Hakemli dergilerde yayınlar

- O. K. Pashaev, J.-Hao Lee, *Relativistic DNLS and Kaup-Newell Hierarchy*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications SIGMA 13 (2017), 058, 13 pages (SCI). (EK-1)

- Ş. A. Büyükaşık, *Squeezing and resonance in a generalized Caldirola-Kanai type quantum parametric oscillator*, Journal of Mathematical Physics 59, 082104 (2018) (SCI) (EK-2)

- Ş. A. Büyükaşık, Z. Çayiç, *Time-evolution of Squeezed Coherent States of a Generalized Quantum Parametric Oscillator*, Journal of Mathematical Physics, 20.05.2019 tarihinde yayına kabul edildi, (SCI) (EK-3).

- Oktay K. Pashaev and Aygül Koçak, *Kaleidoscope of Classical Vortex Images and Quantum Coherent States*, V. G. Kac et al. (eds.), Symmetries, Differential Equations and Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 266, Springer Nature Switzerland AG 2018 (EK-4)

- Aygül Koçak and Oktay Pashaev , *Special functions with mod n symmetry and kaleidoscope of quantum coherent states*, Journal of Physics: Conf. Series 1194 (2019) 012059. (EK-5)

- Tuğçe Parlakgörür and Oktay Pashaev , *Apollonius Representation and Complex Geometry of Entangled Qubit States*, Journal of Physics: Conf. Series 1194 (2019) 012086. (EK-6)

- Oktay Pashaev , *Quantum Group Symmetry for Kaleidoscope of Hydrodynamic Images and Quantum States*, Journal of Physics: Conf. Series 1194 (2019) 012087. (EK-7)

TÜBİTAK

- Ş. A. Büyükaşık and Zehra Çayiç, *Dynamics of squeezed states of a generalized quantum parametric oscillator*, Journal of Physics: Conf. Series 1194 (2019) 012018. (EK-8)

Yüksek Lisans ve Doktora Tezleri

- Tuğçe Parlakgörür , *Apollonius Representation and Complex Geometry of Entangled Qubit States*, Yüksek Lisans Tezi (2018). (EK-9)
- Aygül Koçak , *Kaleidoscope of Quantum Coherent States and Units of Quantum Information*, Yüksek Lisans Tezi (2018). (EK-10)
- Osman Çetintaş , *Algebraic Methods and Exact Solutions of Quantum Parametric Oscillators*, Yüksek Lisans Tezi (2019) (bitirmek aşamasında). (EK-11)
- Şengül Nalcı Tümer, *Quantum Calculus of Classical Heat-Burgers' and Quantum Coherent States* , Doktora Tezi Bölümü (2017)(EK-12)

Preprint, Sunumlar, Bildiri özetleri, Posterler

- Ş. Nalcı, O.K. Pashaev, *q-Viscous Burgers' Equation: Dynamical Symmetry, Shock Solitons and q-Semiclassical Expansion*, arXiv:1707.01737v1 [nlin.SI] July (2017). (EK-13)
- O. K. Pashaev, *General Dispersive Nonlinear Integrable systems and q-calculus with Recursion operator and Spectral parameter bases*, The 8 International Workshop on Differential Equations and Applications WDEA 2017 Abstract Book (2017) (EK-14)
- O. K. Pashaev, *The Resonant Soliton Hierarchies. From RNLS and KP-II to Relativistic and q-Dispersive Resonant Solitons*, 2017 Workshop on Nonlinear PDEs in Applied Mathematics, Abstract Book (2017). (EK-15)
- O.K. Pashaev, *Classical Method of Images and Quantum Entangled Coherent States* , Math and Physics Research Seminar Talk, Monday, November 13, 2017, New York University of Abu Dhabi, 2017. (EK-16)

TÜBİTAK

- O.K. Pashaev, *The Resonant Soliton Hierarchies. From RNLS and KP-II to Relativistic and q-Dispersive Resonant Solitons*, Physics Seminar Talk, 16 November 2017, New York University of Abu Dhabi, 2017. (EK-17)

- Ş. Nalcı, O.K. Pashaev, *Dynamical Symmetry and Exact Solutions of q-viscous Burgers equation*, The 8 International Workshop on Differential Equations and Applications WDEA 2017 Abstract Book (2017) (EK-18)

- Oktay K. Pashaev and Aygül Koçak, *Kaleidoscope of Quantum Coherent States*, arXiv:1706.05542v1 [quant-ph] June (2017). (EK-19)

- Oktay K. Pashaev and Tuğçe Parlakgörür, *Apollonius Representation of Qubits*, arXiv:1706.05399v1 [quant-ph] June (2017). (EK-20)

- Tuğçe Parlakgörür and Oktay K. Pashaev , *Apollonius Representation of Qubit States*, Solstice of Foundations — ETH Zurich 2017 Quantum foundations summer school: 18-21 June. Contextuality workshop: 22-23 June. Poster (2017). (EK-21)

- Oktay K. Pashaev ve Aygül Koçak, *KALEIDOSCOPE OF QUANTUM COHERENT STATES*, 3rd INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYMMETRIES, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATIONS 14-17 AUGUST 2017 Poster (EK-22)

- Aygül Koçak and Oktay K. Pashaev, *QUANTUM GROUP SYMMETRY AND QUANTUM INFORMATION FOR KALEIDOSCOPE OF COHERENT STATES IN QUANTUM OPTICS*, Kuantum Optiği ve Bilişim Toplantısı 2 (KOBİT-2) 1-2 ¸Subat 2018 Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Talk and Book of Abstracts (EK-23)

- Tuğçe Parlakgörür and Oktay K. Pashaev, *APOLLONIUS REPRESENTATION OF QUBIT STATES*, Kuantum Optiği ve Bilişim Toplantısı 2 (KOBİT-2) 1-2 ¸Subat 2018 Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Poster and Book of Abstracts (EK-24)

- O.K. Pashaev, *Quantum Group Symmetry for Kaleidoscope of Hydrodynamic Images and Quantum States*, Group32-2018, 9-13 July, 2018, Prague, Czech Republic, Talk and Abstract (EK-25)

- Aygül Koçak and Oktay K. Pashaev, *Kaleidoscope of Quantum Coherent States and Units of Quantum Information*, Group32-2018, 9-13 July, 2018, Prague, Czech Republic , Talk and Book of Abstracts (EK-26)

- Tuğçe Parlakgörür and Oktay Pashaev, *Apollonius Representation and Geometry of Entangled Qubit States*, Group32-2018, 9-13 July, 2018, Prague, Czech Republic , Talk and Book of Abstracts. (EK-27)

- Ş. A. Büyükaşık and Zehra Çayiç, *Dynamics of squeezed states of a generalized quantum parametric oscillator*, Group32-2018, 9-13 July, 2018, Prague, Czech Republic , Talk and Book of Abstracts.(EK-28)

- Aygül Koçak and Oktay Pashaev, *Kaleidoscope of Quantum Coherent States and Units of Quantum Information*, İzmir Matematik Günleri, 26-27 Haziran (2018) Abstract. (EK-29)

- Merve Özvatan and Oktay Pashaev, *Generalized Golden-Fibonacci Calculus and Applications*, İzmir Matematik Günleri, 26-27 Haziran (2018) Abstract . (EK-30)

- Tuğçe Parlakgörür and Oktay Pashaev, *Apollonius Representation and Geometry of Qubit States*, İzmir Matematik Günleri, 26-27 Haziran (2018) Abstract . (EK-31)

- Kıvılcım Alkan Acar and Oktay Pashaev , *Generalized Complex Numbers and Integrable Systems*, İzmir Matematik Günleri, 26-27 Haziran (2018) Abstract . (EK-32)

- O. K. Pashaev, *Dynamical Symmetry, q-Semiclassical Expansion and Shock Soliton Fission in q-Viscous Burgers' Equation*, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan , Seminar Talk 28 August 2018. (EK-33)

- O. K. Pashaev, *Mathematics of Nonlinear World. From Pendulum to Solitons* , Taitung University, Taitung, Taiwan , Seminar Talk 10 September 2018. (EK-34)

- Tuğçe Parlakgörür and Oktay Pashaev , *Nonlinear Cauchy-Riemann Equations and Liouville Equation For Conformal Metrics*, arXiv:1706.10201v1 [nlin.SI] June (2017). (EK-35)

0.2 Konferans ve Seminar Listesi

- The 8 International Workshop on Differential Equations and Applications WDEA 2017, 2-4 June 2017, Izmir
- The II International Workshop on Nonlinear PDEs in Applied Mathematics, 8-10 August, 2017, Izmir
- Solstice of Foundations — ETH Zurich, Switzerland, 2017 Quantum foundations summer school: 18-21 June. Contextuality workshop: 22-23 June.
- The 32nd International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (Group32) -2018, 9-13 July, 2018, Prague, Czech Republic
- Mathematics and Physics Research Seminar Talk, Monday, November 13, 2017, New York University of Abu Dhabi, UAE, 2017
- Physics Seminar Talk, 16 November 2017, New York University of Abu Dhabi, UAE, 2017
- Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan , Seminar Talk 28 August 2018.
- Taitung University, Taitung, Taiwan , Seminar Talk 10 September 2018.
- The 3rd International Conference on Symmetries, Differential Equations and Applications 14-17 August, Istanbul, 2017
- Kuantum Optiği ve Bilişim Toplantısı 2 (KOBİT-2) 1-2 ¸Subat 2018 Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Istanbul
- İzmir Matematik Günleri, 26-27 Haziran, İzmir (2018)

TÜBİTAK

İçindekiler

0.1 Makaleler, Bildiriler ve Yüksek Lisans Tezleri 2
0.2 Konferans ve Seminar Listesi 6

1 Özet 10

2 Abstract 11

3 Giriş 12

4 Literatür Özeti 15

5 Gereç ve Yöntem 18

6 Bulgular ve Tartışmalar I: Integrallenebilen sistemler ve doğrusal olmayan osilatörler 21

6.1 Genel Dispersiyon 21
6.1.1 Göreli (rölativistik) ve göreli-olmayan parçacık 22
6.1.2 Farklı dispersiyon ilişkileri 23
6.1.3 q - deforme olmuş dispersiyonlar: 24
6.1.4 Tek serbestlik derecesi 24
6.1.5 Çoklu-periyodik sistemler 25
6.1.6 Kompleks koordinatlarda doğrusal osilatör 27
6.1.7 Kompleks koordinatlarda genel osilatör 28
6.1.8 Klasik f-osilatör 29
6.1.9 f-osilatör Örnekleri 30

7 Bulgular ve Tartışmalar II: Kuantizasyon ve kuantum grup simetrisi 34

7.0.10 Kuantum f-osilatör 34

7.0.11 f-osilatör ve Schrödinger denkleminin kanonik kuantizasyonu) 37
7.1 Zamana bağlı Schrödinger denkleminin çözümü 39

8 Bulgular ve Tartışmalar III: Genel f-dispersiyona sahip dogrusal Schrödinger denklemi 43
8.0.1 Düşük frekans ve keyfi dispersiyon 43
8.1 Kanonik Kuantizasyon ve genel dispersiyona sahip Schrödinger denklemi 43
8.2 Dinamik simetriler 45
8.2.1 Dinamik simetri ve genel dispersiyona sahip serbest Schrödinger denkleminin tam çözümleri 46

9 Bulgular ve Tartışmalar IV: Rezonant AKNS hiyerarşisi ve genel dispersiyona sahip denklemler 51
9.1 q-Difüzyon Isı Denklemi ve Burgers' Hiyerarşisi 51
9.1.1 q-viskoziteli Burgers' Denklemi ve Burgers Hiyerarşisi . 52
9.2 Keyfi dispersiyona sahip integrallenebilen doğrusal olmayan hiyerarşiler 53
9.2.1 NLS hiyerarşisi 54
9.2.2 Genel NLS hiyerarşi denklemi 55
9.2.3 Göreli NLS denklemleri 57
9.2.4 q-Doğrusal olmayan Schrödinger denklemi 58
9.2.5 Göreli DNLS ve Kaup-Newell Hiyerarşisi 59
9.2.6 Keyfi Dispersiona sahip ve rezonant KN hiyerarşisi . . 60
9.2.7 DNLS hiyerarşisi ve keyfi dispersiyona sahip DNLS . . 60
9.2.8 Göreli DNLS 61
9.3 Hirota bilinear yöntemi ile j-NLS'nin rezonant soliton çözümleri 62

10 Bulgular ve Tartışmalar V: Parametrik kuantum osilatörün çözümleri ve kuantum dinamik simetrisi 63
10.1 Sönümlü parametrik kuantum osilatörler 63
10.1.1 Dinamik simetri 63
10.2 Dinamik simetri ve Schrödinger denkleminin çözümü 71
10.2.1 Köklerin hareketi 72
10.3 Parametrik koherent (eş uyumlu) durumlar 73
10.4 Genel Kuadratik ve Parametrik Osilatörde Sıkıştırılmış Durumlar 79

10.4.1 Genelleştirilmiş Caldirola-Kanai parametrik osilatörde sıkıştırılmış ve rezonans durumları 79
10.4.2 Zamana bağlı koherent durumlar 80
10.4.3 Zamana bağlı sıkıştırılmış koherent durumlar 82
10.5 Schrödinger'in parametrik Cat durumları 84
10.5.1 Cat durumları için özdeger problemi 85
10.5.2 Cat durumlarının fermiyonik gösterimi 85
10.6 Parametrik trinity durumlar 86
10.6.1 Trinity durumlar için özdeğer problemi 86
10.7 Parametrik quartet durumlar 87
10.8 Parametrik Kuantum Koherent Durumların Kaleidoskopu . . . 88
10.8.1 Kuantum Fourier Dönüşümü 88
10.9 Kuantum Cebiri 89
10.9.1 Simetrik durum 90
10.10Qubitlerin Apollonius gösterimi 90

11 Bulgular ve Tartışmalar VI: Girdap hareketi için f kuantizasyonu 92
11.1 Halka biçimli bölgede f-osilatör olarak girdap 92
11.1.1 q-osilatör olarak daire halkasında girdap rotasyonu . . 92
11.2 Doğrusal olmayan osilatör olarak N-girdap poligonu 96

12 Bulgular ve Tartışmalar VII: Simetrik ve Fibonacci q-analitik durumlar 98
12.1 q-analitik fonksiyonlar 98
12.1.1 Simetrik olmayan q-analitik fonksiyonları 98
12.1.2 Simetrik q-analitik fonksiyonlar 99
12.1.3 pq-analitik fonksiyon 99
12.1.4 Altın analitik fonksiyon 100
12.1.5 Altın koherent durumlar 101
12.1.6 Altın Fock-Bargman gösterimi 102

13 Sonuçlar 104
13.1 Bilimsel Sonuçlar 104
13.2 Öneriler, Uygulama alanları ve Açık problemler 106

Bölüm 1

Özet

Bu projede, keyfi ve q-deforme olmuş dispersiyona sahip doğrusal olmayan yeni integrallenebilir sistemler ve tam çözülebilen dinamik quantum simetrilerine sahip kuantum modellerin hiyerarşisi inşa edildi. İlk olarak, normal koordinatlarda q- ve f- deforme olmuş osilatörler de dahil olmak üzere, klasik çok boyutlu integrallenebilen sistemler deforme olmuş keyfi deformasyona sahip doğrusal olmayan osilatörler olarak çözüldü. Schrödinger gösteriminde, keyfi dispersiyona sahip quantum parametrik osilatör denklemi çözüldü, quantum dinamik simetrileri bulundu, zamana bağlı evrim ve tam çözümleri de incelendi. Doğrusal olmayan integrallenebilen evrim denklemleri NLS, DNLS ve AKNS ile onların doğrusal gösterimleri için, doğrusal olmayan deformasyona sahip dispersiyonlar inşa edildi. Özel olarak, yineleme operatörün yardımıyla, q-deforme olmuş ve göreli dispersiyona sahip NLS, DNLS denklemler hiyerarşisi ve karşılık gelen rezonant soliton denklemleri elde edildi. Dinamik simetri ve evrim operatörü yöntemleri ile zamana bağlı ağırlık ve frekansa sahip kuantum parametrik osilatör için Schrödinger denklemi çözüldü. Bu modeller için koherent durumlar, sıkıştırılmış koherent durumlar, resonant ve sönümleme dinamikleri elde edildi. Kuantum Fourier dönüşümü yardımıyla, birin kökleri olan q ile ilişkili, kuantum grup simetrisi olarak koherent durumların superpozisyonu inşa edildi. Bu kaleydoskop durumlar kuantum enformasyon birimi olarak görülebilir. Tekli ve çoklu kubitler için Apollonius gösterimi bulundu. Halka biçimli bölgede N-poligon girdaplar ve onların doğrusal olmayan osilatör olarak quantizasyonu çalışıldı. Generik pq-Fibonacci ve altın analitik durumlar için q-analitik koherent durumlar ve ilgili Fock-Bargman gösterimleri tanıtıldı. **Anahtar kelimeler**: integrallenebilir sistemler, dinamik simetrileri, quantum parametrik osilatör, koherent durumlar, girdap

TÜBİTAK

Bölüm 2

Abstract

In this project we construct a new class of classical nonlinear integrable systems with an arbitrary deformed and in particular with q-deformed dispersion, and exactly solvable hierarchy of quantum systems with dynamical quantum symmetry. We have solved classical multidimensional integrable systems as an arbitrary deformed nonlinear oscillators, including q- and f-deformed oscillators, in normal coordinates. In the Schrodinger picture, we solved non-stationary, parametric Schrodinger equations with arbitrary dispersion, found quantum dynamical symmetries, exact solutions and time evolution.

We constructed nonlinear deformations of dispersion for integrable nonlinear evolution equations like NLS, DNLS and AKNS and their linear representations. In particular, we obtained, by the recursion operator, the q-deformed and relativistic dispersive NLS and DNLS equations on corresponding hierarchies and corresponding resonant soliton equations.

By dynamical symmetry and by evolution operator methods we have solved parametric oscillator equation with arbitrary time dependent frequency and mass parameters. For these models we have obtained coherent states, squeezed coherent states, resonant and damped dynamics. Superposition of coherent states with quantum group symmetry, associated with q as roots of unity, are constructed by quantum Fourier transform. These kaleidoscope states describe units of quantum information, for which we obtained Apollonius representation of single and multiple qubits. We study motion of N polygon vortices in annular domain and quantization of this motion as nonlinear oscillator. We introduced q-analytical coherent states and related Fock-Bargman representation for generic pq-Fibonacci and golden analytical states.

Bölüm 3

Giriş

Projenin amacı, simetrik, simetrik olmayan ve Fibonacci durumlarını içeren, keyfi deformasyon ve q-deformasyona sahip doğrusal olmayan yeni integrallenebilir sistemler sınıfı inşa etmek. Bu doğrultuda, genelleştirilmiş ve zamana bağlı parametrik q- ve f-deformasyona sahip osilatörler çözüldü. Durağan olmayan, parametrik ve keyfi dispersiyona sahip Schrödinger denklemleri için dinamik quantum simetrileri ve tam çözümleri elde edildi.

Bu türden dispersiyona sahip doğrusal Schrödinger denklemi Pashaev (2009) tarafından tanıtıldı, ve bu modelin durağan olmayan ve parametrik genellemesini Büyükaşık ve Pashaev (2009, 2010, 2012) yöntemleriyle çalışıldı.

Özellikle, hidrodinamiğin klasik ve kuantum problemlerinde sınırlı bölgede N-girdap ve kaynak olarak uygulamaları incelendi. Pashaev ve Yılmaz (2008, 2009, 2011) çalışmalarında annular bölgede tanımlı N-girdap problemini q-fonksiyonlar cinsinden çözdüler. Bu sonuçlar, Pashaev (2012, 2014) tarafından sınırlı bölgedeki keyfi akış için iki çember teoremi olarak genelleştirildi. Pashaev (2015) bu sonuçları köşeli bölgede girdapların kaleidoscope olarak nasıl genişletilebileceğini gösterdi ve girdap problemini lineer olmayan f-osilatör olarak tanımladı. Pashaev (2015) yaklaşımını kullanarak NLS, AKNS ve KP gibi doğrusal olmayan integrallenebilir evolusyon denklemlerin dispersiyonu için doğrusal olmayan deformasyonlar tanıtıldı. Özellikle, yineleme operatörü ile q-deforme olmuş dispersiyon denklemlerle ilgili hiyerarşileri ve bunların rezonans soliton çözümleri elde edildi.

Doğrusal olmayan integrallenebilir sistemler, dispersiyon ve doğrusal olmayan etkilerin dengelendiği, tam çözülebilen klasik ve kuantum modellerin geniş bir sınıfını temsil eder. Bu sistemlerin, özel soliton çözümleri fiziğin ve mühendisliğin birçok dalında karşımıza çıkar. Sonsuz boyutlu simetri grubuna sahip, bu sistemler olağanüstü özellikler gösterir. Örneğin, simetriden dolayı keyfi sayıda solitonlar cinsinden soliton çözümlerinin elde edilmesi mümkün, ve ayrıca, Kdv, NLS ve KP gibi soliton denklemlerinin sonsuz hiyerarşilerini oluşturur. Bu simitriler temelde kuantum gruplara dayanır. Bu grupların, değişmeli olmayan geometri, düğüm teorisi, topolojik solitonlar, dizi teorisi ve yerçekimine uygulamaları vardır. Ayrıca, kuantum Heisenberg-Weil grubunun gerçekleşmesinde q-osilatörler temel rol oynar. V. Manko ve diğer yazarlar (1993,1995) q-osilatörün fiziksel anlamını açıkladılar, ve frekansı oscillasyonlara bağlı doğrusal olmayan osilatöre karşılık geldiğini gösterdiler. Bu yaklaşımı f-osilatör için de uyguladılar. Ayrıca bu yöntem, kütle ve frekans gibi sabit parametrelerin integral zaman sabiti ile değiştirilmesi sonucunda değişken parametreli daha geniş integrallenebilir sistemler sınıfının elde edilmesine yol açtı. Böylece yeni system integrallenebilir özelliğini korur ve lineer olmayan osilatörlerin hiyerarşisini oluşturur. Pashaev (2015) integrallenebilen bir boyutlu her denklem eylem-açı değişkenler cinsinden doğrusal olmayan f-tipi osilatöre denk geldiğini, tam çözülebildiğini ve kuantize edilebildiğini gösterdi. q-analitik coherent durumlarının yeni bir sınıfı ve Fock-Bargmann gösterimleri Pashaev ve Nalci (2014) tarafından elde edildi. Parvani ve Pashaev (2008), kuantum informasyon teorisi ve soliton hiyerarşisi ilişkisinden yola çıkarak soliton tipi doğrusal olmayan q-ve f-deformasyonlu denklemler tanıttılar. Pashaev (2009) relativistik doğrusal olmayan integrallenebilir ve relativistik düzeltmeye sahip NLS denklemi elde etti.

Önemli birçok fiziksel sistem, evrim tipi doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle modellenir. Sonsuz simetri gruplarına ve soliton çözümlerine sahip bu denklemlerin özel bir sınıfı ayrıcalıklı rol oynar. Bu da denklemin dispersiyonu ile doğrusal olmama durumu arasında ve yineleme operatörünün yapısında yansıtılan, kesin bir ilişkiye yol açar. Yineleme operatörü ters saçılma (inverse scattering) yöntemi ile çözülebilen evrim denklemlerinin sonsuz hiyerarşisini verir. NLS hiyerarşisi için bu operatör ile, enformasyon ölçülerinin hiyerarşisi (Parwani ve Pashaev, 2008) tarafından, relativistik Schrödinger denklemi (Pashaev, 2009), ve simetrik q-dispersiyona sahip Schördinger denklemi (Pashaev, 2015) tarafından elde edilmiştir.

Bu projede, simetrik olmayan q-dispersiyona ve Fibonacci tipi dispersiyona sahip tam çözülebilen modelleri çalışıldı, ve ilgili Lax denklemleri formule edip simetri gruplarını ve soliton çözümlerini elde ettik. Rezonant solitonlar 1+1 boyutta, (Pashaev ve Lee, 2002) tarafından tanıtılmıştır. Daha sonra, kuantum potansiyelinin tanıtımı ile zarf (envelope) soltion denklemlerinin rezonant uzantılarının nasıl elde edileceği (Pashaev, Lee ve Rogers, 2008), 2+1 boyutlu DS denkleminde (Rogers ve Pashaev, 2011), KP-II için (Pashaev ve Francisco, 2005)' da gösterilmiştir. (Kodama, 2010) tarafından sığ su dalgalarına uygulamaları gösterilmiştir. Projede ayrıca DNLS, AKNS ve KN hiyerarşisi gibi diğer tam çözülebilen hiyerarşiler için q-dispersiyona ve Fibonacci tipi dispersiyona sahip tam çözülebilen modeller elde edildi. Özellikle, q-dispersiyonlu denklemler ve ilgili SO(2,1) AKNS ve KN hierarşisi için göreli rezonant soliton çözümleri bulduk.

q-osilatörünün analitik koherent durumları (Arik vd., 1976)'da tasvir edilmiştir. Projede, q-analitik fonksiyonlar olarak (Pashaev ve Nalcı, 2014) tarafından tanıtılan yeni kompleks fonksiyonlara dayalı, yeni q-analitik koherent durumları ve q-analitik Fock-Bargman temsilleri çalışıldı. Bu durumlar modelin kuantum simetrisini daha açık bir şekilde gösteriyor ve dolaşık kuantum durumları için çoklu kuantum bitinin bulunmasına imkan veriyor. Bu fonksiyonların ve durumların benzerini q-simetrik ve Fibonacci durumları için de çalıştık. Parametrik osilatörün Schrödinger denklemini çözmek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu modelleri keyfi f- ve q-dispersiyonu içerecek şekilde genişlettik. Daha sonra, kuantum grubu olarak modellerin dinamik simetrisini çalıştık. Bu yönde bazı çalışmalar (Man'ko, 1995), (Batouli vd., 2015)'de yayınlanmıştır.

Bölüm 4

Literatür Özeti

İntegrallenebilen sistemlerin ve soliton teorisinin keşfi (Bullough ve Caudrey, 1980) kitabında iyi bir şekilde yansıtılmıştır. Bu sistemleri ters saçılma (inverse scattering) yöntemi ile çözmenin yolları (Novikov vd.,1984), (Ablowitz ve Segur, 1981)'de özetlenmiştir. Soliton denklemlerinin çözümüne yönelik farklı teknikler ve uygulama alanları (Scott, 1999) tarafından derlenmiştir. İntegrallenebilen evrim denklemlerinin AKNS hiyerarşisi ve bununla ilgili yineleme operatörü (Ablowitz vd., 1974)'de tanıtılmıştır. İntegrallenebilen hiyerarşi ve bilgi ölçümleri arasındaki ilişki (Parwani ve Pashaev, 2008) tarafından elde edilmiştir. BF ve Chern-Simons topolojik teori ile integrallenebilen hiyerarşilerin ilişkisi (Lee ve Pashaev, 1998), (Pashaev ve Gürkan, 2007) tarafından incelenmiştir. Schrödiger hiyerarşisini kullanarak, relativistik düzeltmelere göre her mertebede integrallenebilen relativistik Schrödinger denklemi ve relativistik doğrusal olmayan Schrödinger denklemi (Pashaev, 2009) tarafından inşa edildi. Simetrik olarak q-deforme olmuş, dispersiyona sahip ve her mertebede integrallenebilen NLS denklemini (Pashaev, 2015) tanıtmıştır.

Kuantum potansiyel terimini de içeren NLS denklemi için rezonant solitonlar (Pashaev ve Lee, 2002) tarafından keşfedilmiştir. Bunun genel NLS için genişletilmesi (Pashaev, Lee ve Rogers, 2008) tarafından, zarf soliton rezonanslar ve Madelung olmayan Broer-Kaup tipi denklemler için (Pashaev, 2012) tarafından yapıldı. Plazma fiziğine uygulaması (Lee vd., 2007)'de ele alındı. KP II için soliton rezonansların AKNS hiyerarşisi ilk olarak (Pashaev ve Francisco, 2005) tarafından elde edildi ve sığ su fenomenine uygulaması (Kodama, 2010) tarafından gerçekleşmiştir.

(Büyükaşık ve Pashaev, 2009, 2010, 2012)) çalışmalarında, özel polinom ve fonksiyonlarla ilgili parametrik kuantum osilatör problemlerini, kuantum Stum-Liouville problemi olarak tanıttılar, ve tam çözümlerini elde ettiler. Ayrıca bu sonuçları Schrödinger denkleminin doğrusal olmayan Madelung formunu bulmak ve çözmek için de kullandılar.

Yakın zamanda kuantum integrallenebilen sistemler alanında, q-deformasyona sahip Lie gruplar yeni kuantum grupları olarak keşfedilmiştir, (Doebner ve Hennig, 1990). Kuantum q-osilatör kavramı, q-deformasyona sahip harmonik osilatör olarak kuantum Heisenberg-Weyl grubu çalışmalarında tanıtılmıştır, (Biedenham, 1989), (Macfarlane, 1989), (Sun, 1989). Bu osilatör simetrik q-kalkülüsü ile ilgilidir (Kac ve Cheung, 2002). q-osilatörün başka bir versiyonu (Arık ve Coon, 1976) simetrik olmayan q-kalkülüsü ile ilgilidir. Fark, q-sayısının tanımındadır. Bu sayıların ve osilatörlerin farklı ve genelleştirilmiş versiyonları (Arık vd.,1992), (Algın, 2005), (Chakrabarti ve Jagannathan, 1991), (Pashaev ve Nalcı, 2012) tarafından çalışılmıştır.

(Man'ko vd., 1993, 1995)in makalelerinde q-osilatörün fiziksel anlamını, doğrusal olmayan salıngaç olarak ifade ettiler. Bu osilatörün frekansı enerjiye hiperbolik cosinus şeklinde bağlıdır. (Man'ko vd., 1993, 1995) frekansın enerjiye keyfi bir fonksiyon olarak bağılı olduğu durumları tanıttılar, ve bunları f-osilatör olarak adlandırdılar. (Dodonov, Malkin ve Man'ko, 1974) bu osilatörün kuantum optiğinde önemini açıkladılar.

q-koherent durumların genellemesi olan f-koherent durumlar (doğrusal olmayan koherent durumlar) (Man'ko vd., 1997) tarafından bulundu. q-osilatörün doğrusal osilatöre dönüşümü (Curtrihgt ve Zachos, 1990), (Polychronakos, 1990)'de tanıtılmıştır (Kulish ve Damaskinsky, 1990) ve (Song, 1990)'un çalışmalarında kullanılmıştır. Kompleks analitik fonksiyonların yeni sınıfı olarak q-analitik fonksiyonlar, q-analitik koherent durumlar ve q-analitik Fock-Bargman temsili olarak uygulamaları (Pashaev ve Nalcı, 2014) tarafından tanıtılmıştır. Dolaşık q-bit durumları için koherent durumların uygulaması (Pashaev ve Gürkan, 2012) tarafından yapılmıştır.

Trigonometrik dispersiyona sahip İzotropik antiferromıknatıslar için spin dalgasının dinamik simetrisitrisi (Makahankov, Pashaev ve Sergeenkov, 1985) tarafından araştırılmıştı.

(Man'ko, 1995), (Batouli vd., 2015)' de kuvvet uygulanmış parametrik osilatörün kuantum grup dinamik simetrisi incelenmiştir. Burada, q-osilatörün hareket integralleri kuantum Heisenberg-Weyl grubunun yer değişme bağıntısına sahipler.

Integrallenebilen modellerin sınıfını q-türev ile genişletme konusunda birçok çalışma yapılmıştır. q-doğrusal Schrödinger modeli için (Dayi ve Duru, 1998), (Pillin, 1994)'den bahsedebiliriz. Doğrusal olmayan durum için, Lax çiftinin q-türev cinsinden formülasyonu kullanıldı (Adler vd., 1998), (Frenkel, 1996), (lliev, 1998), ve zaman ölçeğinde (Gürses vd., 2008) inceledi.

Şok solitonların q-analoğu, q-uzayında ve zaman değişkenleri cinsinden (Nalcı ve Pashaev, 2010) tarafından tanıtılmıştı, ve sadece bir q-uzayı durumu (Pashaev ve Nalcı, 2012)'de verildi. Bu projede önerilen yaklaşım farklıdır. Dispersiyonun q- ve f-deformasyonunu yapacağız ve ardından hiyerarşinin standart türevlerini kullanacağız.

Halka biçimli bölgede tanımlı girdap problemine q-fonksiyonlarla yaklaşım yöntemi (Pashaev ve Yılmaz, 2009, 2011) tarafından geliştirilmiştir, ve genel iki çember teoremi olarak (Pashaev, 2012, 2014) tarafından formüle edilmiştir. Bir nokta girdap için bu hareketin f-osilatör olarak kuantizasyonu (Pashev, 2015) tarafından yapılmıştır. Chern-Simons teorisine uygulaması (Pashaev ve Gürkan, 2007) çalışmasında görülebilir. Bu çalışmaları kama biçimli bölgeler için genişletmeyi, iki nokta ve çoklu nokta girdap konfigürasyonlarını kuantize etmeyi ve çoklu nokta girdap durumlarını q-bit olarak inşa etmeyi planlıyoruz.

Bölüm 5

Gereç ve Yöntem

İntegrallenebilen sistemler ve doğrusal olmayan osilatörler

1. Çok boyutlu integrallenebilen sistemlerin gösterimini, eylem-açı değişkenler cinsinden, genliğe bağlı frekansa sahip q-ve f-tipi doğrusal olmayan osilatörler şeklinde bulduk. Özellikle, simetrik, simetrik olmayan, Fibonacci ve altın durumlarını çalıştık. Bunun için klasik ve kuantum mekaniklerin yöntemlerini kullandık.

2. Integrallenebilen sistemleri doğrusal olmayan osilatörler olarak gösterdik. Sonlu boyutlu integrallenebilen sistemlerin, çok boyutlu doğrusal olmayan osilatörler olarak temsilini elde etmek için eylem-açı değişkenlerine kanonik dönüşümler uyguladık ve onları q ve f-osilatör olarak formüle etmek için kanonik olmayan dönüşüm kullandık.

Kuantizasyon ve kuantum grup simetrisi

1. Çok boyutlu kuantum integrallenebilir sistemler için enerji spektrumunu, özdurumlarını, koherent durumlarını ve zamana bağlı evrim çalışıldı.

2. q ve f-osilatörlerin kanonik kuantizasyonu bulundu ve kuantum simetriye karşılık gelen kuantum cebirsel yöntemler kullanıldı.

3. q ve f-osilatörlerin kanonik kuantizasyonu yapıldı ve onların kuantum simetrilerini veren kuantum cebiri bulundu. Enerji spektrumu ve özfonksiyonları q-hesaplama yöntemleriyle bulundu.

Genel f-doğrusal Schrödinger denklemi

1. q- osilatör dispersiyonu da dahil, keyfi f-dispersiyona sahip doğrusal serbest ve osilatör Schrödinger denklemleri özel fonksiyonlar cinsinden gösterim yöntemleri ile çözüldü.

2. Genel f-lineer Schrödinger denklemleri tanıtıldı ve aynı yöntemle çözümleri bulundu.

3. q-simetrik, simetrik olmayan, Fibonacci ve altın dispersiyonlu lineer Schrödinger denklemleri tanıtıldı. Hareket eden dalgalar, genelleştirilmiş Kampe de Feriet polinomlar yöntemi ile bulundu.

AKNS, NLS ve KN hiyerarşisi f ve q resonant denklemleri

1. Kuantum simetri, göreli ve q- ve f-dispersiyona sahip doğrusal olmayan evrim denklemleri inşa edildi. Bunun için NLS, AKNS, DNLS ve KN hiyerarşilerinin yineleme operatörler yöntemi kullanıldı. Soliton, periyodik dalga ve özellikle rezonant soliton gibi çözümleri bu yöntemle elde ettik.

Kuantum parametrik osilatörün çözümleri ve kuantum dinamik simetrisi

1. Schrödinger gösteriminde, değişken parametreli durağan olmayan quantum osilatör problemi çözüldü. Bunun için dinamik simetri ve evrim operatörü yöntemleri kullanıldı.

2. Dalga fonksiyonlar, koherent durumlar, sıkıştırılmış koherent durumlar bulundu, ve davranışları zamana bağlı parametrelere bağlı olarak analitik yöntemler kullanarak incelendi.

3. Keyfi doğrusal olmayan dispersiyona sahip değişken parametreli Schrödinger osilatör denklemleri tanıtıldı. Bu modellerin kuantum dinamik simetrisi belirlendi, çözümleri ve koherent durumları elde edildi.

f kuantizasyon ve girdap hareketi

1. Bir nokta girdap, iki nokta girdap ve N- nokta girdap çokgeni gibi çözümlerin halka biçimli bölgelerinde, f-osilatörün kuantizasyonunu bizim yöntemlerle elde edildi.

2. f-osilatör yöntemi ile girdap hareketlerinin kuantizasyonu yapıldı.

3. İki çember teoremini uygulayarak, kama ve halka biçimli sınırlı bölgelerde tanımlı girdap ve kaynak konfigurasyonları bulundu. q-özel fonksiyonlar cinsinden çözümleri bulundu ve analiz edildi.

Simetrik ve Fibonacci q-analitik durumlar

1. Simetrik olmayan q-analitik durumların kavramı, simetrik q-analitik durumlara, Fibonacci-analitik durumlara ve altın-analitik durumlara genişletildi. Bunun için kuantum mekaniğin yöntemleri kullanıldı. Bu türden analitik özelliklere sahip koherent durumları ve kuantum durumları için Fock-Bargman temsili bulundu. Dolaşıklık özelliğine sahip çoklu koherent durumlar ve yeni kuantum simetriler aynı metod ile inşa edildi.

Bölüm 6

Bulgular ve Tartışmalar I: Integrallenebilen sistemler ve doğrusal olmayan osilatörler

6.1 Genel Dispersiyon

Kompleks formdaki düzlem dalga

$$e^{i(\mathbf{kx}-\omega t)} \tag{6.1}$$

dalga karakteristikleri ile belirlenir: dalga vektörü $\mathbf{k}$ dalga yayılımı yönündedir ve mutlak değeri aşağıdaki gibidir

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{6.2}$$

burada, λ dalganın dalga boyudur ve $\omega = 2\pi\nu$ açısal frekanstır. Elektromanyetik alan için frekans ve dalga numarası arasındaki ilişki aşağıdaki eşitlikle verilir

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{c^2}, \tag{6.3}$$

ve bu da dispersiyon ilişkisini vermektedir

$$\omega(\mathbf{k}) = \pm c|\mathbf{k}|. \tag{6.4}$$

Genel durumda dalga fonksiyonu doğrusal süperpozisyon durumundadır [29])

$$u(\mathbf{x}, t) = \int A(\mathbf{k})\, e^{i(\mathbf{kx}-\omega(\mathbf{k})t)} d^3k. \tag{6.5}$$

Burada

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) \tag{6.6}$$

dalga denklemi tarafından belirlenen genel dispersiyon bağıntısıdır.

Dalga karakteristikleri olan ω ve $\mathbf{k}$, kuantizasyon sonrası enerji ve momentum gibi parçacık karakterisitikleri ile ilişkisi aşağıdaki gibidir

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \tag{6.7}$$

6.1.1 Göreli (rölativistik) ve göreli-olmayan parçacık

Göreli-olmayan serbest parçacık için enerji, momentumun kuadratik formundadır

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \tag{6.8}$$

ve karşılık gelen dalganın dispersiyon ilişkisi aşağıdaki gibi bulunur

$$\omega(\mathbf{k}) = \hbar\frac{\mathbf{k}^2}{2m}. \tag{6.9}$$

Göreli parçacık için enerji ve momentum arasındaki ilişki ise aşağıdaki gibi verilir,

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2 + \mathbf{p}^2, \tag{6.10}$$

ve dispersiyon formülü kolaylıkla bulunur

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2} + \mathbf{k}^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} + \mathbf{k}^2. \tag{6.11}$$

Burada,

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{mc}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{6.12}$$

ve

$$\lambda = \frac{h}{mc} \tag{6.13}$$

göreli kuantum parçacığın Compton dalga boyudur. Denklem (6.11)'den dispersiyon ilişkisinin göreli formu elde edilir

$$\omega(\mathbf{k}) = \pm\frac{mc^2}{\hbar}\sqrt{1 + \hbar^2\frac{\mathbf{k}^2}{m^2c^2}}. \tag{6.14}$$

Göreli-olmayan limitte, $p << mc$ enerji bağıntısı aşağıdaki gibidir

$$E = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \tag{6.15}$$

ve kuadratik dispersiyon ilişkisi

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_0 + \hbar\frac{\mathbf{k}^2}{2m} \tag{6.16}$$

olur. Bir başka limit $p >> mc$ ultra-göreli limittir ve buna karşılık gelen dispersiyon aşağıdaki gibi doğrusaldır

$$\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|. \tag{6.17}$$

6.1.2 Farklı dispersiyon ilişkileri

Katılarda fononlar:

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_0 \left|\sin\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{2}\right|. \tag{6.18}$$

Yarı-iletkenler:

$$\omega(\mathbf{k}) = \hbar\frac{k_1^2}{2m_1} + \hbar\frac{k_2^2}{2m_2} + \hbar\frac{k_3^2}{2m_3}. \tag{6.19}$$

Magnonlar ve spin dalgaları

1) *Ferromanyetik*: Düzlem dalga magnonların frekansları aşağıdaki gibi verilir

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_0 + Js\sum_{\delta}(1 - \cos\mathbf{k}\cdot\delta). \tag{6.20}$$

Tek boyutlu lineer zincirde iki magnonun bağlı durumu için dispersiyon:

$$\omega(k) = \omega_0 \sin^2\frac{ka}{2}. \tag{6.21}$$

2) *Antiferromanyetik*: s spinli lineer spin zinciri için, antiferromanyetik uyarılmanın spektrumu dispersiyonu verir [20]

$$\omega(k) = \frac{2s}{\hbar}|\sin ka|. \tag{6.22}$$

6.1.3 q - deforme olmuş dispersiyonlar:

Kuantum grupları, q-analizine göre, dispersiyon formüllerinin matematiksel deformasyonunu belirler. Bir dispersiyon ilişkisi $\omega = \omega(k)$ ele alalım. Bu durumda

$$\Omega(k) = \omega_0 \left[\frac{\omega(k)}{\omega_0}\right]_q \tag{6.23}$$

dispersiyonun bir q-deformasyonudur, ve ω_0 sabit bir karakteristik frekanstır. Burada, q-analizin türüne göre farklı deforme olmuş dispersiyon çeşitleri bulunmaktadır:

1. Simetrik olmayan q-dispersiyon:

$$\Omega(k) = \omega_0 \frac{q^{\omega(k)/\omega_0} - 1}{q - 1} = \omega_0 \left[\frac{\omega(k)}{\omega_0}\right]_q . \tag{6.24}$$

2. Simetrik q-dispersiyon:

$$\Omega(k) = \omega_0 \frac{q^{\omega(k)/\omega_0} - q^{-\omega(k)/\omega_0}}{q - q^{-1}} = \omega_0 \left[\frac{\omega(k)}{\omega_0}\right]_{\tilde{q}} = \omega_0 \frac{\sinh(\ln q \frac{\omega(k)}{\omega_0})}{\sinh(\ln q)}. \tag{6.25}$$

Bu iki dispersiyon bilinen dispersiyonlara indirgenebilir: $q \to 1$ için $\Omega(k) \to \omega(k)$.

3. Fibonacci dispersiyonu:

$$\Omega(k) = \omega_0 F_{\omega(k)/\omega_0} = \omega_0 \frac{\varphi^{\omega(k)/\omega_0} - \varphi'^{-\omega(k)/\omega_0}}{\varphi - \varphi'}. \tag{6.26}$$

6.1.4 Tek serbestlik derecesi

Eylem-açı değişkenleri cinsinden gösterimi yapılan integrallenebilir modellerin lineer olmayan salınımlar olarak düşünülmesine izin verir. Tek serbestlik dereceli Hamiltonyen sistemi, enerji korunumundan dolayı integrallenebilirdir. $H(p,q)$ fonksiyonu (q,p) kanonik değişkenli Hamiltonyen fonksiyonu olsun. Eylem ve açı değişkenleri (J,θ) üreteç fonksiyonuyla verilir

$$S(q,J) = S(q,H(J)) = \int^q p(q,H)dq. \tag{6.27}$$

ve kısaca aşağıdakiler cinsinden hesaplanır

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint p(q,H)dq = J(H), \quad \theta = \frac{\partial S(q,J)}{\partial J}. \tag{6.28}$$

Hareketin sonlu olduğunu varsayıyoruz ve integrali salınımın tam periyodu üzerinden alıyoruz. Hamilton hareket denklemleri bu değişkenler cinsinden şöyledir:

$$\dot{J} = -\frac{\partial H(J)}{\partial \theta} = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H(J)}{\partial J} \equiv \omega(J). \tag{6.29}$$

İlk denklem H'nin sadece J'nin bir fonksiyonu olduğunu, θ'dan (halkasal koordinat), ve eylem değişkeninden bağımsız olduğunu gerektirir, bununla beraber E hareketin integralidir. İkinci denklem lineer olmayan frekans $\omega = \omega(J)$'yı verir.

$$J = J(E), \quad \theta(t) = \omega(J)t + \theta_0. \tag{6.30}$$

S ve θ'nın bir periyoddaki değişimi

$$\Delta S = \oint pdq = 2\pi J, \quad \Delta\theta = \frac{\partial \Delta S}{\partial J} = 2\pi, \tag{6.31}$$

ve sistemin yörüngesi faz uzayında (p, q) verilen zaman ekseni t ile silindirik yüzey üzerinde bir eğri temsil etmektedir. Öyleyse, (J, θ)'nın fonksiyonu olan orjinal değişkenler (q, p) periyodiktir ve spektral ayrıştırma olarak Fourier serisine ayrıştırılabilir

$$q(J, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(J)e^{in\theta}, \quad p(J, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(J)e^{in\theta}. \tag{6.32}$$

6.1.5 Çoklu-periyodik sistemler

Eylem değişkenleri $J_1, J_2, ..., J_s$ ve açı değişkenleri $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_s$ olan integrallenebilir sistemler için Hamiltonyen,

$$H = H(J_1, J_2, ..., J_s) \tag{6.33}$$

ve Hamilton hareket denklemleri:

$$\dot{J}_k = -\frac{\partial H(J)}{\partial \theta_k} = 0, \quad \dot{\theta}_k = \frac{\partial H(J)}{\partial J_k}. \ k = 1, 2, ..., s. \tag{6.34}$$

Dolayısıyla, aşağıdaki sonucu elde ederiz

$$J_k = constant, \quad \theta_k(t) = \omega_k(J)t + \theta_k(0). \tag{6.35}$$

Burada frekanslar ω_k aşağıdaki değişkenler cinsinden tanımlıdır

$$\omega_k = \omega_k(J_1, J_2, ..., J_s) = \frac{\partial H(J)}{\partial J_k}, \quad k = 1, 2, ..., s. \tag{6.36}$$

Eylem değişkenleri aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$J_k = \oint_{C_k} \sum_{j=1}^{f} p_j dq_j, \quad k = 1, 2, ..., f, \tag{6.37}$$

ayrıca koordinatlar ve momentum periyodik fonksiyonlar olup Fourier serisine açılabilir

$$F = \sum_{n_1,...,n_f=-\infty}^{\infty} C_{n_1,...,n_f}(J_1, J_2, ..., J_s) e^{i(n_1\theta_1+...+n_f\theta_f)}. \tag{6.38}$$

Doğrusal osilatör

Örnek olarak, doğrusal osilatör

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} \tag{6.39}$$

eylem değişkenleri cinsinden yazılabilir

$$H_0(J) = \omega_0 J, \quad \omega(J) = \omega_0 \tag{6.40}$$

ve çözümleri aşağıdaki gibidir

$$J = \frac{H_0}{\omega_0}, \quad \theta(t) = \omega_0 t + \theta_0. \tag{6.41}$$

$\omega(J) = \omega_0$, J'ya bağlı olmadığından, osilatör doğrusaldır. Spektral ayrıştırmanın sadece $n = \pm 1$ için harmonikleri vardır

$$q(J, \theta) = \sqrt{\frac{2J}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad p(J, \theta) = \sqrt{2Jm\omega_0} \cos(\omega_0 t + \theta_0). \tag{6.42}$$

Diğer modların (6.32)'de görünmesi salınımlarda anharmonik davranışların varlığını gösterir. Doğrusal osilatör için Hamiltoniyen J'nin doğrusal bir fonksiyonudur. Doğrusal osilatörler dizisi için normal koordinatlarda gösterimi

$$H = \omega_1 J_1 + ... + \omega_s J_s \tag{6.43}$$

öyle ki salınım frekansları sabittir

$$\omega_k = \frac{\partial H}{\partial J_k}, \quad \theta_k(t) = \omega_k t + \theta_k(0), \quad k = 1, ...s. \tag{6.44}$$

6.1.6 Kompleks koordinatlarda doğrusal osilatör

Aşağıdaki kompleks değişkeni tanımlayalım

$$\alpha = i\sqrt{J}e^{-i\theta}, \quad \bar{\alpha} = -i\sqrt{J}e^{i\theta}, \tag{6.45}$$

ve Poisson parantezini verelim

$$\{\alpha, \bar{\alpha}\} = -i. \tag{6.46}$$

Bu değişken cinsinden doğrusal osilatörün Hamiltonyeni (6.39) veya (6.40) aşağıdaki halini alır

$$H_0 = \omega_0 \alpha\bar{\alpha}. \tag{6.47}$$

Kompleks değşkenin, koordinat ve momentum cinsinden ifadesi

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}\left(q + \frac{i}{m\omega_0}p\right), \; \bar{\alpha} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}\left(q - \frac{i}{m\omega_0}p\right) \tag{6.48}$$

olur, veya

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}}\left(m\omega_0 q + ip\right), \; \bar{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}}\left(m\omega_0 q - ip\right). \tag{6.49}$$

Bu değişkenin zamana bağlı evrim denklemi

$$\dot{\alpha} + i\omega_0\alpha = 0 \tag{6.50}$$

veya

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0 \tag{6.51}$$

aşağıdaki çözüme sahip

$$\alpha(t) = re^{-i(\omega_0 t + \theta_0)}, \tag{6.52}$$

ve dairenin $r = |\alpha| = \sqrt{J}$ yarıçapından bağımsız sabit ω_0 frekansı ile orijin etrafındaki dönmeyi temsil etmektedir. Bu sadece doğrusal osilatör için geçerlidir.

Doğrusal osilatörler dizisi için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir

$$\alpha_k = i\sqrt{J_k}e^{-i\theta_k}, \quad \bar{\alpha}_k = -i\sqrt{J_k}e^{i\theta_k}, \tag{6.53}$$

$$\{\alpha_k, \bar{\alpha}_l\} = -i\delta_{kl}, \tag{6.54}$$

$$H = \omega_1\alpha_1\bar{\alpha}_1 + ... + \omega_s\alpha_s\bar{\alpha}_s. \tag{6.55}$$

6.1.7 Kompleks koordinatlarda genel osilatör

Eylem-açı değişkenlerinin kuantizasyonu için, zaman eylem değişkeni J yerine hermitik operatör $\hat{J}$'nin kullanılmasını gerekir, θ açısı yerine de üniter operator $e^{i\theta}$ kullanılır. Bu, sistemin kuantizasyonu için uygun değişkenlerin $\{\theta, J\} = 1$ kompleks fonksiyonlar olması gerekliliğini gösterir

$$\alpha = i\sqrt{J}e^{-i\theta}, \quad \bar{\alpha} = -i\sqrt{J}e^{i\theta}, \tag{6.56}$$

kanonik parantezi

$$\{\alpha, \bar{\alpha}\} = -i. \tag{6.57}$$

$J = \alpha\bar{\alpha}$ olduğundan, bu değişkenler cinsinden tanımlı doğrusal osilatör Hamiltonyeni doğrusal bir fonksiyondur

$$H_0 = \omega_0 \alpha\bar{\alpha},$$

ve genel Hamiltonyen $H(J)$, H_0'ın fonksiyonudur

$$H = H(J) = H(\alpha\bar{\alpha}) = H\left(\frac{H_0}{\omega_0}\right). \tag{6.58}$$

Bu evrim denklemini doğrusal olmayan salıngaç olarak tanımlar

$$\dot{\alpha} = -i\frac{\partial H(\alpha\bar{\alpha})}{\partial\bar{\alpha}} = -iH'(|\alpha|^2)\alpha = -i\omega(|\alpha|^2)\alpha, \tag{6.59}$$

ve yüksekliğe bağlı frekans bağıntısı

$$\omega(|\alpha|^2) = \frac{dH(J)}{dJ}|_{J=\alpha\bar{\alpha}}$$

bir hareket sabitidir (integral of motion). Son denklemden $|\alpha(t)| \equiv r$ zamandan bağımsız olduğu anlaşılır ve çözüm

$$\alpha(t) = re^{-i\omega(r^2)t - i\theta_0} \tag{6.60}$$

orijin etrafında r yarıçaplı bir çember etrafında dönen bir nokta tanımlamaktadır ve dönmenin frekansı çemberin yarıçapı r'ye bağlıdır.

6.1.8 Klasik f-osilatör

Eşitlik (6.58) gibi genel $H = H(J) = H(\alpha\bar{\alpha})$ Hamiltoniyen için kompleks değişkenler yoluyla

$$\alpha_f = \sqrt{\frac{H(J)}{\omega_0 J}}\,\alpha, \quad \bar{\alpha}_f = \sqrt{\frac{H(J)}{\omega_0 J}}\,\bar{\alpha}, \tag{6.61}$$

veya

$$\alpha_f = i\sqrt{\frac{H(J)}{\omega_0}}\,e^{-i\theta(t)}, \quad \bar{\alpha}_f = -i\sqrt{\frac{H(J)}{\omega_0}}\,e^{i\theta(t)}, \tag{6.62}$$

burada $J = \bar{\alpha}\alpha$, $\theta(t) = \omega(J)t + \theta_0$,

$$\omega(J) = \frac{dH(J)}{dJ} \tag{6.63}$$

modeli f-osilatör şeklinde ifade ediyoruz,

$$H(\alpha_f\bar{\alpha}_f) = \omega_0\alpha_f\bar{\alpha}_f, \tag{6.64}$$

Poisson parantezi

$$\{\alpha_f, \bar{\alpha}_f\} = -\frac{i}{\omega_0}\frac{\partial H}{\partial J} = -i\frac{\omega(J)}{\omega_0} \tag{6.65}$$

ve frekans (6.63) ile belirlenmiş evrim denklemi

$$\dot{\alpha}_f = -i\omega\alpha_f. \tag{6.66}$$

Çözüm (6.62) frekansı yarıçapına bağlı düzlemde çember etrafında dönmeyi tarif etmektedir:

$$R^2(J) = |\alpha_f|^2 = \frac{H(J)}{\omega_0}, \quad \omega(R^2) = \omega_0\frac{dR^2(J)}{dJ}.$$

Koordinat-momentum gösterimi

Eşitlik (6.48)'den momentum-koordinat gösterimini elde ederiz

$$\alpha_f = \sqrt{\frac{H(J)}{\omega_0 J}}\frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}}\left(m\omega_0 q + ip\right), \quad \bar{\alpha}_f = \sqrt{\frac{H(J)}{\omega_0 J}}\frac{1}{\sqrt{2m\omega_0}}\left(m\omega_0 q - ip\right) \tag{6.67}$$

burada

$$\omega_0 J = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} \tag{6.68}$$

ve

$$H(J) = H\left(\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}\right)\right). \tag{6.69}$$

Yeni bir notasyon tanımlarsak

$$q_f = \sqrt{\frac{H(J)}{\omega_0 J}}\, q, \;\; p_f = \sqrt{\frac{H(J)}{\omega_0 J}}\, p, \tag{6.70}$$

bu durumda genel Hamiltonyen için harmonik osilatör biçiminde bir eşitlik elde ederiz

$$H(J) = H\left(\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}\right)\right) = \frac{p_f^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q_f^2}{2} \tag{6.71}$$

ancak bu yeni değişkenler kanonik değillerdir ve aşağıdaki eşitliği sağlarlar

$$\{q_f, p_f\} = \frac{\omega(J)}{\omega_0}. \tag{6.72}$$

6.1.9 f-osilatör Örnekleri

Göreli-olmayan doğrusal osilatör:

$$H(J) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} = \omega_0 J, \;\; \omega(J) = \frac{dH(J)}{dJ} = \omega_0. \tag{6.73}$$

Göreli doğrusal osilatör:

$$H = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2 + m^2\omega_0^2 q^2}{m^2 c^2}} \tag{6.74}$$

veya eylem değişkenleri cinsinden

$$H(J) = mc^2\sqrt{1 + \frac{2\omega_0}{mc^2}J} \tag{6.75}$$

$$\omega(J) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{2\omega_0}{mc^2}J}}. \tag{6.76}$$

Simetrik-olmayan q-deforme olmuş göreli-olmayan osilatör:

Hamiltonyen

$$H_q(J) = \hbar\omega_0 \left[\frac{J}{\hbar}\right]_q = \hbar\omega_0 \frac{q^{J/\hbar} - 1}{q - 1} \tag{6.77}$$

ve frekans

$$\omega_q(J) = \omega_0 \frac{\ln q}{q - 1}\, q^{J/\hbar} \tag{6.78}$$

$q \to 1$ limitinde lineer salınıcıyı vermektedir. $\ln q$ kuvvetleri cinsinden seri açılımında aşağıdaki düzeltmeleri vermektedir

$$H_q(J) = \omega_0 J + \hbar\omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln q)^n}{(n+1)!} \left[B_{n+1}\left(\frac{J}{\hbar}\right) - B_{n+1}(0)\right]. \tag{6.79}$$

$$\omega_q(J) = \omega_0 + \omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln q)^n}{n!} B_n\left(\frac{J}{\hbar}\right). \tag{6.80}$$

Buradaki $B_n(x)$ Bernoulli polinomlarıdır. Bu düzeltmeler J'nin kuvvetleri cinsinden doğrusal olmayan fonksiyonlardır:

$$H_q(J) = \omega_0 \frac{\ln q}{q - 1}\, J + \frac{\hbar\omega_0}{q - 1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln q)^n}{n!} \left(\frac{J}{\hbar}\right)^n, \tag{6.81}$$

$$\omega_q(J) = \omega_0 \frac{\ln q}{q - 1} + \frac{\omega_0}{q - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln q)^{n+1}}{n!} \left(\frac{J}{\hbar}\right)^n. \tag{6.82}$$

Simetrik q-deforme olmuş göreli-olmayan osilatör:

Hamiltonyen

$$H_{\tilde{q}}(J) = \hbar\omega_0 \left[\frac{J}{\hbar}\right]_{\tilde{q}} = \hbar\omega_0 \frac{q^{J/\hbar} - q^{-J/\hbar}}{q - q^{-1}} = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh(\ln q)} \sinh\left(\ln q\, \frac{J}{\hbar}\right) \tag{6.83}$$

ve frekans

$$\omega_{\tilde{q}}(J) = \omega_0 \frac{\ln q}{\sinh(\ln q)}\, \cosh\left(\ln q\, \frac{J}{\hbar}\right). \tag{6.84}$$

$\ln q$'nun kuvvetleri cinsinden seri açılımında aşağıdaki düzeltmeleri vermektedir

$$H_{\tilde{q}}(J) = \omega_0 J + \hbar\omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(\ln q)^{2n}}{(2n+1)!}\, B_{2n+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{J}{2\hbar}\right), \tag{6.85}$$

$$\omega_{\tilde{q}}(J) = \omega_0 + \omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(\ln q)^{2n}}{(2n)!} B_{2n}\left(\frac{1}{2} + \frac{J}{2\hbar}\right). \tag{6.86}$$

Bu düzeltmeler J'nin kuvvetleri cinsinden lineer olmayan fonksiyonlardır:

$$H_{\tilde{q}}(J) = \omega_0 \frac{\ln q}{\sinh(\ln q)} J + \frac{\hbar\omega_0}{\sinh(\ln q)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln q)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{J}{\hbar}\right)^{2n+1}, \tag{6.87}$$

$$\omega_{\tilde{q}}(J) = \omega_0 \frac{\ln q}{\sinh(\ln q)} + \frac{\omega_0}{\sinh(\ln q)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln q)^{2n+1}}{(2n)!}\left(\frac{J}{\hbar}\right)^{2n}. \tag{6.88}$$

Fibonacci veya p-q göreli-olmayan osilatör:

Hamiltonyen

$$H_{pq}(J) = \hbar\omega_0 \left[\frac{J}{\hbar}\right]_{pq} = \hbar\omega_0 \frac{p^{J/\hbar} - q^{J/\hbar}}{p - q} \tag{6.89}$$

ve frekans

$$\omega_{pq}(J) = \omega_0 \frac{p^{J/\hbar} \ln p - q^{J/\hbar} \ln q}{p - q}. \tag{6.90}$$

Altın Fibonacci göreli-olmayan osilatör:

Hamiltonyen

$$H_F(J) = \hbar\omega_0 \left[\frac{J}{\hbar}\right]_F = \hbar\omega_0 \frac{\varphi^{J/\hbar} - \varphi'^{J/\hbar}}{\varphi - \varphi'} = \hbar\omega_0 F_{J/\hbar} \tag{6.91}$$

ve frekans

$$\omega_{pq}(J) = \omega_0 \frac{\varphi^{J/\hbar} \ln \varphi - \varphi'^{J/\hbar} \ln \varphi'}{\varphi - \varphi'}. \tag{6.92}$$

Göreli simetrik-olmayan q-deforme olmuş osilatör:

Göreli osialatörün

$$H(J) = mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\omega_0}{mc^2} J} \tag{6.93}$$

q-deformasyonu aşağıdaki gibidir

$$H_q(J) = \hbar\omega_0 \left[\frac{H(J)}{\hbar\omega_0}\right]_q = \hbar\omega_0 \left[\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\sqrt{1 + \frac{2\omega_0}{mc^2} J}\right]_q. \tag{6.94}$$

Göreli simetrik q-deforme olmuş osilatör:

$$H_q(J) = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh(\ln q)} \sinh\left(\ln q\, \frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\sqrt{1+\frac{2\omega_0}{mc^2}J}\right) \tag{6.95}$$

Özel durum

$$q = e^{\frac{\hbar\omega_0}{mc^2}} \tag{6.96}$$

için, şu hali almaktadır

$$H_q(J) = mc^2 \frac{\frac{\hbar\omega_0}{mc^2}}{\sinh\frac{\hbar\omega_0}{mc^2}} \sinh\left(\sqrt{1+\frac{2\omega_0}{mc^2}J}\right). \tag{6.97}$$

Generik Hamiltonyenin p-q deformasyonları:

Verilen bir Hamiltonyen $H(J)$ için, genel p-q deformasyonu

$$H_{pq}(J) = \hbar\omega_0 \left[\frac{H(J)}{\hbar\omega_0}\right]_{pq} = \hbar\omega_0 \frac{p^{H(J)/\hbar\omega_0} - q^{H(J)/\hbar\omega_0}}{p-q}. \tag{6.98}$$

Özel deformasyonlar:

1. Simetrik-olmayan $p = 1$

$$H_q(J) = \hbar\omega_0 \left[\frac{H(J)}{\hbar\omega_0}\right]_{q} = \hbar\omega_0 \frac{q^{H(J)/\hbar\omega_0} - 1}{q-1}. \tag{6.99}$$

2. Simetrik olan $p = q^{-1}$

$$H_{\tilde{q}}(J) = \hbar\omega_0 \left[\frac{H(J)}{\hbar\omega_0}\right]_{\tilde{q}} = \hbar\omega_0 \frac{q^{\frac{H(J)}{\hbar\omega_0}} - q^{-\frac{H(J)}{\hbar\omega_0}}}{q-q^{-1}} = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh(\ln q)} \sinh\left(\ln q \frac{H(J)}{\hbar\omega_0}\right). \tag{6.100}$$

3. Altın Fibonacci

$$H_F(J) = \hbar\omega_0 F_{\frac{H(J)}{\hbar\omega_0}} = \hbar\omega_0 \frac{\varphi^{\frac{H(J)}{\hbar\omega_0}} - \varphi'^{\frac{H(J)}{\hbar\omega_0}}}{\varphi - \varphi'}. \tag{6.101}$$

Bölüm 7

Bulgular ve Tartışmalar II: Kuantizasyon ve kuantum grup simetrisi

7.0.10 Kuantum f-osilatör

Bu sistemin kuantizasyonunda kompleks değişkenler olan α ve $\bar{\alpha}'$ın yerini bozonik işlemciler olan a, ve a^+, alır $[a, a^+] = 1$, eylem değişkeni J'nin yerini sayı işlemcisi $N = a^+a$, ve klasik Hamiltonyen fonksiyonu $H(J)'$nın yerini tek hermityen kuantum operatörü $H(N)$ alır. Yukarıda adı geçen kuantum operatörler cinsinden yeni operatörler tanımlayabiliriz

$$a_f = a\sqrt{\frac{H(N)}{\hbar\omega_0 N}} = \sqrt{\frac{H(N+I)}{\hbar\omega_0(N+I)}}a, \quad a_f^+ = a^+\sqrt{\frac{H(N+I)}{\hbar\omega_0(N+I)}} = \sqrt{\frac{H(N)}{\hbar\omega_0 N}}a^+ \tag{7.1}$$

öyle ki

$$a_f^+ a_f = \frac{1}{\hbar\omega_0}H(N), \quad a_f a_f^+ = \frac{1}{\hbar\omega_0}H(N+I) \tag{7.2}$$

ve

$$[a_f, a_f^+] = \frac{1}{\hbar\omega_0}(H(N+I) - H(N)). \tag{7.3}$$

Kuantum f-osilatör için Hamiltonyen işlemcisi aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}(a_f a_f^+ + a_f^+ a_f). \tag{7.4}$$

$H(N)$ işlemcisi cinsinden aşağıdaki biçimini alır

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[H(N) + H(N + I)], \tag{7.5}$$

ayrık enerji spektrumuna

$$E_n = \frac{1}{2}[H(n) + H(n + 1)] \tag{7.6}$$

ve aşağıdaki özdurumlara sahiptir

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad a|0\rangle = 0. \tag{7.7}$$

Göreli-olmayan kuantum osilatörü

$H(J) = \omega_0 J$ bağıntısından $H = \hbar\omega_0 N$ işlemcisini ve Hamiltonyeni elde ederiz

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}(N + N + 1) = \hbar\omega_0\left(N + \frac{1}{2}\right)$$

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Göreli kuantum osilatör

Bilinen işlemciden

$$H(N) = mc^2\sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2}N}$$

aşağıdaki Hamiltonyen elde edilir

$$\mathcal{H} = mc^2\left(\sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2}N} + \sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2}(N + I)}\right)$$

ve onun spektrumu da bulunur

$$E_n = mc^2\left(\sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2}n} + \sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2}(n + 1)}\right).$$

Simetrik-olmayan kuantum q-osilatör

Hamiltonyen fonksiyonunda yerine koyma ile aşağıdaki q-sayı işlemcisini

$$H_q(J) = \hbar\omega_0 \left[\frac{J}{\hbar}\right]_q \quad \rightarrow \quad H_q(N) = \hbar\omega_0 [N]_q$$

ve Hamiltonyeni elde ederiz

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}([N]_q + [N+I]_q).$$

q-osilatörün spektrumu aşağıdaki gibidir

$$E_n = \frac{\hbar\omega_0}{2}([n]_q + [n+1]_q).$$

Simetrik kuantum q-osilatör

Klasik Hamiltonyen fonksiyonundan aşağıdaki simetrik q-sayı işlemcisini

$$H_{\tilde{q}}(J) = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh \ln q} \sinh\left(\ln q \, \frac{J}{\hbar}\right) \quad \rightarrow \quad H_{\tilde{q}}(N) = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh \ln q} \sinh\left(\ln q \, N\right)$$

ve Hamiltonyeni elde ederiz

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2\sinh \ln q}\left(\sinh\left(\ln q \, N\right) + \sinh\left(\ln q\,(N+I)\right)\right).$$

Basitleştirirsek aşağıdaki sonucu elde ederiz

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2\sinh \frac{\ln q}{2}} \sinh\left(\ln q\,(N + \frac{1}{2})\right)$$

spektrum ise aşağıdaki gibidir

$$E_n = \frac{\hbar\omega_0}{2\sinh \frac{\ln q}{2}} \sinh\left(\ln q\,(n + \frac{1}{2})\right).$$

Kuantum p-q veya Fibonacci osilatörü

$$H_{pq}(J) = \hbar\omega_0 \left[\frac{J}{\hbar}\right]_{pq} \quad \rightarrow \quad H_{pq}(N) = \hbar\omega_0 [N]_{pq}$$

aşağıdaki Hamiltonyeni vermektedir

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}([N]_{pq} + [N+I]_{pq})$$

ve onun spektrumu da

$$E_n = \frac{\hbar\omega_0}{2}([n]_{pq} + [n+1]_{pq}).$$

Kuantum altın osilatör

Fibonacci işlemcisi

$$H_F(J) = \hbar\omega_0 \left[\frac{J}{\hbar}\right]_F \quad \rightarrow \quad H_F(N) = \hbar\omega_0 [N]_F = \hbar\omega_0 F_N$$

aşağıdaki Hamiltonyeni vermektedir

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}(F_N + F_{N+I}) = \frac{\hbar\omega_0}{2} F_{N+2I}$$

ve onun spektrumu

$$E_n = \frac{\hbar\omega_0}{2} F_{n+2}.$$

7.0.11 f-osilatör ve Schrödinger denkleminin kanonik kuantizasyonu)

Katı hal fiziğinde, elektron modifiye edilmiş kinetik enerjiye veya yayılıma sahip serbest parçacık gibi düşünülebilir, citeZiman. Eğer yayılım verilmişse $\omega = \omega(\mathbf{k})$ ve buna karşılık gelen enerji de $E = E(\mathbf{p}) = \hbar\omega(\mathbf{p}/\hbar)$ şeklinde ise, Hamiltonyen işlemcisi $H = H(-i\hbar\nabla)$ ve momentum işlemcisi $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ olur. Bu da dalga fonksiyonunun Schrödinger denklemine göre evrimini verir

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = H(-i\hbar\nabla)\psi(\mathbf{x},t). \tag{7.8}$$

Göreli-olmayan kuantum osilatör:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}\,x^2\right)\psi(x,t). \tag{7.9}$$

Göreli kuantum osilatör:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = mc^2\sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega_0^2}{c^2}\,x^2}\,\psi(x,t). \tag{7.10}$$

Göreli ve simetrik olmayan q-deforme olmuş osilatör:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hbar\omega_0\left[-\frac{\hbar}{2m\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0}{2\hbar}\,x^2\right]_q\psi(x,t). \tag{7.11}$$

Göreli-olmayan simetrik q-deforme olmuş osilatör:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh(\ln q)}\sinh\left(-\frac{\hbar\ln q}{2m\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0\ln q}{2\hbar}\,x^2\right)\psi(x,t). \tag{7.12}$$

Göreli-olmayan altın Fibonacci osilatör:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hbar\omega_0 F_{\left(-\frac{\hbar}{2m\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0}{2\hbar}\,x^2\right)}\psi(x,t) \tag{7.13}$$

Göreli ve simetrik q-deforme olmuş osilatör:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh(\ln q)}\sinh\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega_0^2}{c^2}\,x^2}\right)\psi(x,t) \tag{7.14}$$

Genel F osilatör ve p-q deformasyonu:

Keyfi H fonksiyonu için F-osilatör için,

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hbar\omega_0 H\left(-\frac{\hbar}{2m\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0}{2\hbar}\,x^2\right)\psi(x,t) \tag{7.15}$$

p-q deformasyonu aşağıdaki denklem ile verilir

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hbar\omega_0 \left[H\left(-\frac{\hbar}{2m\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0}{2\hbar}\,x^2 \right) \right]_{pq} \psi(x,t). \tag{7.16}$$

7.1 Zamana bağlı Schrödinger denkleminin çözümü

Bir önceki bölümde tanıtılan tüm quantum modellerinde Hamiltonyen işlemcisi zamandan bağımsızdır. Bu nedenle tüm modellerin çözümü doğrusal osilatörün çözümleri cinsinden bulunabilir. Schrödinger gösteriminde genel F-osilatör ele alalım

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hbar\omega_0 H\left(-\frac{\hbar}{2m\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0}{2\hbar}\,x^2 \right) \psi(x,t). \tag{7.17}$$

Bu denklemin çözümü aşağıdaki biçimdedir

$$\psi_n(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} u_n(x) \tag{7.18}$$

ve zamandan bağımsız Schrödinger denklemi aşağıdaki gibidir

$$\hbar\omega_0 H\left(-\frac{\hbar}{2m\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0}{2\hbar}\,x^2 \right) u_n(x) = E_n\, u_n(x). \tag{7.19}$$

Burada Hamiltonyen H'nin argümanına göre analitik bir fonksiyon olduğunu varsayıyoruz, öyle ki kuvvet serisi cinsinden ifade edilebilir

$$H(a^2) = H(0) + H_1 a^2 + H_2 a^4 + ... + H_n a^{2n} + ... \tag{7.20}$$

Bu durumda, lineer osilatör denkleminden başlayarak

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}\,x^2 \right) u_n(x) = \epsilon_n\, u_n(x) \tag{7.21}$$

aşağıdaki özdeğerler

$$\epsilon_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

ve özfonksiyonlar cinsinden

$$u_n(x) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\, x \right) \tag{7.22}$$

k'nın tüm pozitif tam sayı kuvvetleri için aşağıdaki ilişkiyi buluruz

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m\omega_0^2}{2}\,x^2\right)^k\ u_n(x)=\epsilon_n^k\,u_n(x). \tag{7.23}$$

Sonuç olarak

$$(H_0+H_1a^2+H_2a^4+...+H_ka^{2k}+...)u_n(x)=(H_0+H_1\epsilon_n^2+H_2\epsilon_n^4+...+H_k\epsilon_n^{2k}+...)u_n(x)$$

veya

$$\hbar\omega_0 H\left(-\frac{\hbar}{2m\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m\omega_0}{2\hbar}\,x^2\right)\,u_n(x)=E_n\,u_n(x). \tag{7.24}$$

Burada

$$E_n=\hbar\omega_0 H\left(n+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega_0\left(H_0+H_1\left(n+\frac{1}{2}\right)+H_2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+...\right)$$

ve denklem (7.17)'in çözümü

$$\psi(x,t)=\sum_n c_n e^{-i\omega_0 H\left(n+\frac{1}{2}\right)t}u_n(x) \tag{7.25}$$

olarak bulunur.

Göreli-olmayan osilatör:

Hamiltonyen

$$H(a^2)=a^2=\frac{1}{\hbar\omega_0}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m\omega_0^2}{2}\,x^2\right)$$

ve spektrum

$$E_n=\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Göreli osilatör:

Spetrum

$$E_n=mc^2\sqrt{1+\frac{2\hbar\omega_0}{mc^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}. \tag{7.26}$$

Göreli ve simetrik olmayan q-deforme olmuş osilatör:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left[n + \frac{1}{2}\right]_q . \tag{7.27}$$

Göreli-olmayan simetrik q-deforme olmuş osilatör

$$E_n = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh(\ln q)} \sinh\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln q\right). \tag{7.28}$$

Göreli-olmayan Fibonacci p-q-deforme olmuş osilatör

$$E_n = \hbar\omega_0 \left[n + \frac{1}{2}\right]_{pq} . \tag{7.29}$$

Göreli-olmayan Altın Fibonacci osilatörü:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left[n + \frac{1}{2}\right]_F = \hbar\omega_0 F_{n+\frac{1}{2}} = \hbar\omega_0 (F_n F_{3/2} + F_{n-1}F_{1/2}). \tag{7.30}$$

Göreli simetrik q-deforme olmuş osilatör:

$$E_n = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh(\ln q)} \sinh\left(\ln q \frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)}\right). \tag{7.31}$$

Bohr-Zommerfeld kuantizasyonu

Yukarıdaki formüller eylem-açı değişkenleri cinsinden Bohr-Zommerfeld kuantizasyonuyla tutarlıdır. Periyodik hareket için, eylem değişkeni aşağıdaki eşitlikle verilir

$$J = \oint p\, dq \quad \to \hbar(n + \frac{1}{2})$$

ve kuantum Hamilton işlemcisi

$$H(J) \quad \to H(\hbar(N + \frac{1}{2})) = H(\hbar(aa^+ + a^+a))$$

ile spektrumu

$$E_n = H\left(\hbar(n + \frac{1}{2})\right)$$

olur. Bu Hamiltonyen ve buna karşılık gelen spektrum, f-osilatör kuantizasyonu (7.4)'den farklıdır, buradaki Hamiltonyen

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}(a_f a_f^+ + a_f^+ a_f)$$

Klasik Hamiltonyen fonksiyonunda $J \rightarrow \hbar N$ yerine konulduğunda, $H(J) \rightarrow H(\hbar N)$ işlemcisi ve aşağıdaki Hamiltonyen elde edilir

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[H(N) + H(N + I)]$$

bu da aşağıdaki spektrumu verir)

$$E_n = \frac{1}{2}[H(n) + H(n + 1)].$$

Bölüm 8

Bulgular ve Tartışmalar III: Genel f-dispersiyona sahip dogrusal Schrödinger denklemi

8.0.1 Düşük frekans ve keyfi dispersiyon

Düşük frekanslı yaklaşımda,

$$J = \frac{p^2}{2m\omega_0} \tag{8.1}$$

Hamiltoniyen keyfi dispersiyon formunda kinetik enerjinin fonksiyonudur

$$H(J) = H\left(\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{p^2}{2m}\right)\right) \tag{8.2}$$

. Giriş bölümünde tartıştığımız fiziksel probleme bağlı olarak, farklı problemleri inceleyebiliriz. Dolayısıyla, Hamiltoniyenin harmonik osilatör formunu tekrar elde ederek, farklı dispersiyona sahip integrallenebilen osilatör modelleri inşa edebiliriz. Aşağıda bu tip problemlerin bir kaçını listeliyoruz.

8.1 Kanonik Kuantizasyon ve genel dispersiyona sahip Schrödinger denklemi

Bu kuantizasyonu yukarıdaki dispersiyonlara uygulayarak Schrödinger dalga denklemlerini elde ederiz (bir boyutlu uzayda):

1. Göreli olmayan serbest parçacık:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t). \tag{8.3}$$

2. Göreli serbest parçacık:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = mc^2\sqrt{1-\frac{\hbar^2}{m^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\psi(x,t). \tag{8.4}$$

3. Ferromanyetik spin dalga denklemi:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hbar\omega_0\sin^2\left(\frac{a}{2}(-i\frac{\partial}{\partial x})\right)\psi(x,t). \tag{8.5}$$

4. Simetrik olmayan q-deforme olmuş göreli olmayan denklem:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hbar\omega_0\left[-\frac{\hbar}{2m\,\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]_q\psi(x,t). \tag{8.6}$$

5. Simetrik q-deforme olmuş göreli olmayan denklem:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh\ln q}\sinh\left(-\frac{\hbar\ln q}{2m\,\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t) \tag{8.7}$$

6. Göreli olmayan Fibonacci denklemi.

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \hbar\omega_0 F_{-\frac{\hbar}{2m\,\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\psi(x,t) = \hbar\omega_0\frac{\varphi^{-\frac{\hbar}{2m\,\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}} - \varphi'^{-\frac{\hbar}{2m\,\omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}}{\varphi-\varphi'}\psi(x,t) \tag{8.8}$$

7. Simetrik olmayan genel q-deforme olmuş denklemi (7.8))

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \hbar\omega_0\left[\frac{H(-i\hbar\nabla)}{\hbar\omega_0}\right]_q\psi(\mathbf{x},t). \tag{8.9}$$

8. Simetrik genel q-deforme olmuş denklemi (7.8)

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh\ln q}\sinh\frac{H(-i\hbar\nabla)}{\hbar\omega_0}\psi(\mathbf{x},t) \tag{8.10}$$

9. Simetrik q-deforme olmuş görelilik denklemi.

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\hbar\omega_0}{\sinh\ln q}\sinh\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\sqrt{1-\frac{\hbar^2}{m^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\right)\psi(x,t) \tag{8.11}$$

8.2 Dinamik simetriler

Schrödinger operatörü verilmiş olsun

$$S = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H, \tag{8.12}$$

ve K operatörü S ile değişmeli olsun

$$[S, K] = SK - KS = 0.$$

Bu durumda K operatörü, Schrödinger denklemi

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \tag{8.13}$$

için bir simetri operatörüdür, ve

$$i\hbar\frac{\partial K}{\partial t} = [H, K] \tag{8.14}$$

eşitliğini sağlar.

Önerme: Simetri operatörü K, Schrödinger denkleminin verilen bir ψ_1 çözümünden

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = H\psi_1, \tag{8.15}$$

aynı denklemin diğer bir çözümünü verir $\psi_2 = K\psi_1$)

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = H\psi_2. \tag{8.16}$$

İspat: Sonuçlar, $S\psi_1 = 0 \Rightarrow 0 = KS\psi_1 = SK\psi_1 = S\psi_2 = 0$ ilişkisinden kaynaklanmaktadır.

Bu önerme, K simetri operatörü yardımıyla tek bir çözümden daha geniş çözüm ailesi bulmamıza olanak verir.

Bu önermeyi, aşağıda iki problemde tam çözümler elde etmek için kullanabiliriz.

1. Genel dispersiyona sahip serbest Schrödinger denklemi.
2. Kuantum parametrik osilatörler.

TÜBİTAK

8.2.1 Dinamik simetri ve genel dispersiyona sahip serbest Schrödinger denkleminin tam çözümleri

Dinamik simetri cebiri

Hamilton operatörü $H = H(P_1)$, uzay ötelemesi üreten momentum operatörünün $P_1 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ keyfi bir fonksiyonudur ve dağılım formülüne $E = E(p)$ karşılık gelir. Zaman öteleme operatörü $P_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ ve genelleştirilmiş iteleme (boost) operatörü ile birlikte

$$K = x - t\frac{dH(P_1)}{dP_1} \tag{8.17}$$

Schrödinger denklemi için simetri operatörleridir

$$[K, S] = 0, \quad [P_\mu, S] = 0, \quad \mu = 0, 1.$$

Bu simetri operatörlerinin cebiri deforme olmuş Galilean cebiridir:

$$[P_0, P_1] = 0, \ \ [P_0, K] = -\hbar H'(P_1), \ \ [P_1, K] = -i\hbar. \tag{8.18}$$

Polinom çözümleri

$E = E(p)$, $E_0 = E(0)$ fonksiyonu ile verilen klasik dispersiyon için, aşağıda verilen üretici fonksiyonunu oluşturarak genel dispersiyona sahip polinomlar olan $H_n(x,t)$ leri tanımlarız

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}(p\,x - (E(p) - E_0)\,t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{p^n}{n!}H_n(x,t). \tag{8.19}$$

Bunlara eşdeğer olan polinomlar

$$H_n(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}(-i\hbar\partial/\partial x) - E_0)t}\,x^n \tag{8.20}$$

verilen denklemin çözümleridir

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}H_n(x,t) = (H - E_0)H_n(x,t). \tag{8.21}$$

K operatörü, denklem (8.14'i sağlar ve

$$K(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}K(0)\,e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}x\,e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} \tag{8.22}$$

şeklindedir. Ayrıca, aşağıdaki formüle göre polinom çözümlerinin sonsuz hiyerarşisini oluşturur

$$KH_n(x,t) = Ke^{-\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}-E_0)t}x^n = e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}-E_0)t}x^{n+1} = H_{n+1}(x,t). \tag{8.23}$$

Göreli olmayan Schrödinger denklemi

Hamiltoniyen

$$H = \frac{1}{2m}P_1^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \tag{8.24}$$

için Galilean boost operatorü

$$K = x + it\frac{\hbar}{m}\frac{d}{dx}. \tag{8.25}$$

Üreteç fonksiyonu

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - \frac{p^2}{2m}t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{p^n}{n!}H_n^{(S)}(x,t) \tag{8.26}$$

Schrödinger polinomlarını verir

$$H_n^{(S)}(x,t) = e^{\frac{i}{\hbar}t\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}x^n \tag{8.27}$$

$H_n^{(KF)}(x,t) = exp[t\frac{d^2}{dt^2}]x^n$ Kampe de Feriet polinomlarıdır, ve

$$H_n^{(S)}(x,t) = H_n^{KF}\left(x, \frac{i\hbar}{2m}t\right). \tag{8.28}$$

Bu çözümler Hermite polinomlar cinsinden de yazılabilir

$$H^{(S)}(x,t) = \left(-\frac{i\hbar}{2m}t\right)^{n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{-2i\hbar t/m}}\right). \tag{8.29}$$

Schrödinger Hierarşisi

Doğrusal Schrodinger hierarşisi için dispersiyon

$$E_N(p) = \frac{p^N}{(2m)^{N-1}c^{N-2}},$$

c- temel hız (ışık hızı) ve Hamiltoniyen

$$\mathcal{H}_N = \frac{(-i\hbar)^N}{(2m)^{N-1}c^{N-2}}\frac{d^N}{dx^N} \tag{8.30}$$

TÜBİTAK

olarak bulunur. Buna göre iteleme operatörü

$$K_N = x - t\frac{N(-i\hbar)^{N-1}}{(2m)^{N-1}c^{N-2}}\frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}} \tag{8.31}$$

ve polinomlar bulunur

$$H_n^{(E_N)}(x,t) = e^{t\frac{(-i)^{N+1}\hbar^{N-1}}{(2m)^{N-1}c^{N-2}}\frac{\partial^N}{\partial x^N}}x^n. \tag{8.32}$$

Bu polinomlar genelleştirilmiş Kampe-de Ferie polinomlar şeklinde yazılabilir. $N = 1$ ve Hamiltoniyen $\mathcal{H} = -i\hbar c\frac{d}{dx}$ için iteleme işlemcisi $K = x - ct$ şeklindedir, ve polinomlar basit iteleme ile bulunur

$$H_n^{(E_1)}(x,t) = e^{ct\frac{d}{dx}}x^n = (x+ct)^n. \tag{8.33}$$

Göreli Schrödinger denklemi

Göreli dispersiyon $E(p) = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$ aşağıdaki Hamiltonyeni verir

$$\mathcal{H} = mc^2\sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\frac{d^2}{dx^2}} \tag{8.34}$$

ve göreceli öteleme

$$K = x + \frac{i\hbar}{m}t\frac{\frac{d}{dx}}{\sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\frac{d^2}{dx^2}}} \tag{8.35}$$

şeklinde bulunur. Göreli düzlem dalga şeklinde üreteç fonksiyonu

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - (\sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} - mc^2)t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\frac{p^n}{n!}H_n^{(SRS)}(x,t) \tag{8.36}$$

göreli polinomları verir

$$H_n^{SRS}(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t[\sqrt{1-\frac{\hbar^2}{m^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}-1]}x^n. \tag{8.37}$$

q- simetrik olmayan Schrödinger denklemi

q-dispersiyona sahip Schrödinger denklemi için

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]_q \Psi,$$

q-deforme olmuş Galilean iteleme operatorü aşağıdaki gibidir

$$K = x + t\frac{\ln q}{q-1}\frac{i\hbar}{m}\frac{d}{dx}q^{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}}.$$

Burada $\ln q$ cinsinden seri açılımı yaparak, Schrödinger denklemi

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln q)^k}{(k+1)!}\left(B_{k+1}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - B_{k+1}\right)$$

ve Galilean iteleme için

$$K = \left(x + \frac{t}{m}i\hbar\frac{d}{dx}\right) + \frac{t}{m}i\hbar\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln q)^k}{k!}B_k\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)$$

yüksek mertebeden türev düzeltmeleri yapılabilir.

q-Symmetrik Schrödinger denklemi

Verilen klasik dispersiyon

$$E(p) = \frac{1}{\sinh\lambda}\sinh\left(\lambda\frac{p^2}{2m}\right), \quad \lambda \equiv \ln q \tag{8.38}$$

için Schrödinger işlemcisi

$$S = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\sinh\lambda}\sinh\left(-\frac{\lambda\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tag{8.39}$$

olur. İteleme operatörü

$$K = x + \frac{i\hbar t}{m}\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\cosh\frac{\lambda}{2}\left(-\frac{\hbar^2}{m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{d}{dx} \tag{8.40}$$

q-deforme olmuş Galilean simetri cebirine ait

$$[P_0, K] = -\frac{\lambda}{m \sinh \lambda} \cosh \frac{\lambda}{2} \left(\frac{P_1}{m} \right) P_1. \tag{8.41}$$

Düslemsel dalga çözümü

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} (px - \frac{1}{\sinh \lambda} \sinh \left(\lambda \frac{p^2}{2m} \right) t) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{p^n}{n!} H_n^{(q)}(x,t). \tag{8.42}$$

q-deforme olmuş Kampe de Feriet polinomlar için üreteç fonksiyon olur $H_n^{(q)}(x,t)$, $q = e^{\lambda}$, ve

$$H_n^{(q)}(x,t) = \exp \left(-\frac{it}{\hbar} \frac{1}{\sinh \lambda} \sinh \left(-\frac{\lambda \hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \right) x^n \tag{8.43}$$

polinomları başlangıç koşulu $H_n^{(q)}(x,0) = x^n$'na karşılık gelen çözümlerdir.

Yüksek mertebeli türevler içeren açılımı buluyoruz

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k+1} (\ln q)^{2k}}{(2k+1)!} B_{2k+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi. \tag{8.44}$$

Bölüm 9

Bulgular ve Tartışmalar IV: Rezonant AKNS hiyerarşisi ve genel dispersiyona sahip denklemler

9.1 q-Difüzyon Isı Denklemi ve Burgers' Hiyerarşisi

Isı denkleminin q-difüzyon deformasyonunu tanıttık. Bu bölüm, [26] nolu referanstaki makaleye dayanmaktadır.

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t) = \left[\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]_q \phi(x,t), \tag{9.1}$$

burada ν difüzyon sabiti ve q-operatörü aşağıdaki gibi

$$\left[\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]_q = \frac{q^{\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}} - 1}{q-1}. \tag{9.2}$$

Bu denklem sonsuz ısı hiyerarşisine aittir. Bu hiyerarşi, sonsuz zamanlı $t_1, t_2, ...$ yüksek dereceli ısı denklemlerinin sonsuz kümesi ile tanımlanır

$$\frac{\partial}{\partial t_n}\phi(x,t_1,t_2,...,t_n,...) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\phi(x,t_1,t_2,...,t_n,...),\ \ n = 1,2,3,... \tag{9.3}$$

TÜBİTAK

q-difüzyon terimini açarak

$$\left[\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]_q = \frac{e^{\nu \ln q \frac{\partial^2}{\partial x^2}} - 1}{q-1} = \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln q)^k \nu^k}{k!} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \tag{9.4}$$

ısı hiyerarşisine (9.3) yeni bir zaman değişkeni eklersek

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln q)^k \nu^k}{k!} \frac{\partial}{\partial t_{2k}} \tag{9.5}$$

$\phi(x, t_1, t_2, ...)$ fonksiyonu q-ısı denklemini sağlar.

q-difüzyonlu ısı ve q-iteleme operatörleri aşağıdaki biçimdedir

$$\hat{S} = \frac{\partial}{\partial t} - \left[\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]_q, \tag{9.6}$$

$$\hat{K} = x + \frac{2\nu \ln q}{q-1} t \frac{d}{dx} e^{\nu \ln q \frac{d^2}{dx^2}}. \tag{9.7}$$

Dinamik simetri cebiri q-deforme olmuş Galilean cebiridir

$$[P_0, K] = \frac{2\nu \ln q}{q-1} \frac{d}{dx} e^{\nu \ln q \frac{d^2}{dx^2}}. \tag{9.8}$$

Denklemin düzlem dalga çözümü, q-deforme olmuş Kampe-de Feriet tipi polinomları $K_N(x, t; q)$ belirler

$$e^{kx} e^{[\nu k^2]_q t} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{k^N}{N!} K_N(x, t; q), \tag{9.9}$$

ve bu polinomlar, Bell polinomları $B_n(t)$ cinsinden ifade edilebilir

$$K_N(x, t; q) = \sum_{n=0}^{[\frac{N}{2}]} \frac{x^{N-2n} N!}{(N-2n)! n!} B_n(\frac{t}{q-1})(\nu \ln q)^n.$$

9.1.1 q-viskoziteli Burgers' Denklemi ve Burgers Hiyerarşisi

q-difüzyonlu ısı denklemi, doğrusal olmayan q-viskoziteli Burgers' denklemiyle ilgilidir. Daha önce verilen (9.1) denklemini $\phi(x, t)$ ile bölerek

$$(\ln \phi(x, t))_t = \frac{1}{\phi(x, t)} \left[\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]_q \phi(x, t) \tag{9.10}$$

elde ederiz. Her iki tarafın x türevini alarak ve aşağıdaki tanımı kullanarak

$$(\ln \phi(x,t))_x = \frac{\phi_x}{\phi} \equiv u, \tag{9.11}$$

q-viskoziteli Burgers' denklemini elde ederiz

$$u_t = \left(\left[\nu \left(\frac{\partial}{\partial x} + u \right)^2 \right]_q \cdot 1 \right)_x . \tag{9.12}$$

Farklı dalga sayısı k_1, ve k_2'ye sahip olan iki düzlem dalgasının üst düşümünü dikkate alarak,

$$\phi(x,t) = e^{k_1 x + [\nu k_1^2]_q t} + e^{k_2 x + [\nu k_2^2]_q t}, \tag{9.13}$$

şok soliton çözüm elde ederiz

$$u(x,t) = \left(k_1 + \frac{k_2 - k_1}{1 + e^{(k_2 - k_1)(x - vt)}} \right), \tag{9.14}$$

ve bu çözümlerin şok hızı

$$v = -\frac{[k_1^2 \nu]_q - [k_2^2 \nu]_q}{k_1 - k_2}$$

şeklinde bulunur. Farklı dalga sayıları $k_1, k_2, ..., k_{n+1}$ ve $\eta_1, ..., \eta_{k+1}$ sabitlerine sahip $n+1$ düzlem dalgalarının üstdüşümlerinin oluşturduğu n-şok soliton çözümü de şu şekilde bulunur

$$u(x,t) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} k_i e^{k_i x + [\nu k_i^2]_q t + \eta_i}}{\sum_{i=1}^{n+1} e^{k_i x + [\nu k_i^2]_q t + \eta_i}}. \tag{9.15}$$

9.2 Keyfi dispersiyona sahip integrallenebilen doğrusal olmayan hiyerarşiler

Önceki bölümlerde, C-integrallenebilen göreli Burgers-Schrödinger denklemini çalıştık. Şimdi, NLS denkleminin AKNS hiyerarşisini kullanarak, göreli NLS, göreli DNLS, rezonans NLS ve DNLS ve q-deforme dispersiyona sahip NLS denklemlerini oluşturacağız. Ana prosedür Pashaev'de [32] açıklanmaktadır.

9.2.1 NLS hiyerarşisi

Zakharov-Shabat doğrusal problemini ele alalım

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}p & -\kappa^2\bar{\psi} \\ \psi & \frac{i}{2}p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = J_1\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{9.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iA & -\kappa^2\bar{C} \\ C & -iA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = J_0\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, . \tag{9.17}$$

Burada reel $A(x,t,p)$ ve karmaşık $C(x,t,p)$ fonksiyonları sıfır eğrilik koşulu ile belirlenir ve aşağıdaki sistemi sağlarlar

$$\partial_t\psi = \partial_x C + 2iA\psi + ip\,C \tag{9.18}$$

$$\partial_t\bar{\psi} = \partial_x\bar{C} - 2iA\psi - ip\,\bar{C} \tag{9.19}$$

$$\partial_x A = i\kappa^2(\bar{C}\psi - C\bar{\psi}). \tag{9.20}$$

A_N denklem (9.18)'de yerine koyulduğunda

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} A^{(n)}\left(-\frac{p}{2}\right)^n, \quad C_N = \sum_{n=0}^{N} C^{(n)}\left(-\frac{p}{2}\right)^n \tag{9.21}$$

evrim denklemini verir

$$\partial_{t_N}\psi = \partial_x C^{(0)} + 2iA^{(0)}\psi \tag{9.22}$$

ve $C^{(N)} = 0,\ A^{(N)} = a_N = const$. Burada yineleme ilişkisi

$$C^{(n)} = \frac{1}{2i}\partial_x C^{(n+1)} + A^{(n+1)}\psi \tag{9.23}$$

$$\partial_x A^{(n)} = i\kappa^2(\bar{C}^{(n)}\psi - C^{(n)}\bar{\psi}), \tag{9.24}$$

$n = 0,1,2,...,N-1$. Son denklemin integralini alarak

$$A^{(n)} = -i\kappa^2\int^x (\bar{\psi}C^{(n)} - \psi\bar{C}^{(n)}) \tag{9.25}$$

ifadesini elde ediyoruz. Ayrıca, (9.25)'yi denklem ((9.23) ve onun karmaşık eşdeğerinde yerine koyarsak, yineleme formülünü buluruz

$$\begin{pmatrix} C^{(n)} \\ \bar{C}^{(n)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mathcal{R}\begin{pmatrix} C^{(n+1)} \\ \bar{C}^{(n+1)} \end{pmatrix}. \tag{9.26}$$

Burada $\mathcal{R}$, matris integro-diferansiyel operatörüdür - NLS hiyerarşisinin yineleme operatörü

$$\mathcal{R} = i\sigma_3 \begin{pmatrix} \partial_x + 2\kappa^2\psi\int^x\bar{\psi} & -2\kappa^2\psi\int^x\psi \\ -2\kappa^2\bar{\psi}\int^x\bar{\psi} & \partial_x + 2\kappa^2\bar{\psi}\int^x\psi \end{pmatrix} \tag{9.27}$$

ve denklemler de

$$i\sigma_3 \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}_{t_N} = \mathcal{R}^N \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \tag{9.28}$$

şeklinde verirlir, t_N, $N = 1, 2, 3, ...$ sonsuz zaman hiyerarşisidir.

9.2.2 Genel NLS hiyerarşi denklemi

Formal seri ile tasvir edilen t zamanı

$$\partial_t = \sum_{N=0}^{\infty} E_N \partial_{t_N} \tag{9.29}$$

E_N keyfi sabitler, ve genel NLS hiyerarşi denklemi aşağıdaki gibidir

$$i\sigma_3 \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}_t = \left(E_0 + E_1\mathcal{R} + ... + E_N\mathcal{R}^N + ...\right) \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \tag{9.30}$$

Bu denklemin integrallenebilirliği, Zakharov-Shabat problemi (9.16) ve zamana göre evrimle ilişkilidir

$$J_0 = \sum_{N=0}^{\infty} E_N J_{0_N} = \begin{pmatrix} -iA & -\kappa^2\bar{C} \\ C & -iA \end{pmatrix} \tag{9.31}$$

ve burada

$$\begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix} = \sum_{N=0}^{\infty} E_N \begin{pmatrix} C_N \\ \bar{C}_N \end{pmatrix} = \sum_{N=1}^{\infty} E_N p^{N-1} [N]_{\mathcal{R}/p} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \tag{9.32}$$

Son denklemde $N = 0$, $C_0 = 0$ kullandık. Sonuç olarak

$$A = \sum_{N=0}^{\infty} E_N A_N = -\frac{1}{2}\sum_{N=0}^{\infty} E_N p^N - i\kappa^2 \left(\int^x \bar{\psi}, -\int^x \psi\right) \begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix} \tag{9.33}$$

elde ettik.

TÜBİTAK

İntegrallenebilen doğrusal olmayan hale getirme

Yukarıdaki denklem (9.30), genel analitik dispersiyon ile doğrusal Schrödinger denkleminin integrallenebilen doğrusal olmayan Schrödinger denklemine genisletilmesini verir. Klasik parçacık sistemini enerji-ivme ilişkisi ile ele alalım

$$E = E(p) = E_0 + E_1 p + E_2 p^2 + ... \tag{9.34}$$

Buna karşılık gelen zamana bağlı Schrödinger dalga denklemi

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = H\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi \tag{9.35}$$

olur. Buradaki Hamilton operatörü, dispersiyon ilişkisinde (9.73) ivmenin operatör ile $p \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ standart değişimin sonucudur. (9.35) denklemi karmaşık eşleniği ile birlikte şöyle yazılabilir:

$$i\hbar\sigma_3 \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = H\left(-i\hbar\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \tag{9.36}$$

Buradaki ivme operatörü, tam olarak doğrusal yaklaşımındaki $\mathcal{R}_0 = i\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}$ yineleme operatörüdür. Bu nedenle (9.36), rastgele analitik dispersiyona sahip doğrusal Schrödinger denklemi olarak yeniden yazılabilir

$$i\hbar\sigma_3 \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = H\left(\mathcal{R}_0\right)\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = \left(E_0 + E_1\mathcal{R}_0 + E_2{\mathcal{R}_0}^2 ...\right)\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \tag{9.37}$$

Ardından bu denklemin (9.30)'da görülen doğrusal olmayan integrallenebilir genişlemesi, $\mathcal{R}_0 \to \mathcal{R}$, $(\hbar = 1)$ yer değişimine karşılık gelir, ve böylece

$$i\sigma_3 \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}_t = H\left(\mathcal{R}\right)\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \tag{9.38}$$

elde edilir. Bu açıdan, ivme için klasik yerine koyma $p \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ veya spinor formundaki denklem için eşdeğerde olan $p \to -i\hbar\sigma_3\frac{\partial}{\partial x} = \mathcal{R}_0$, bize doğrusal Schrödinger denklemi icin kuantizasyonu verir. Yerine koyarken $p \to \mathcal{R}$ "doğrusal olmayan kuantizasyon" ve doğrusal olmayan Schrödinger hiyerarşi denklemini verir. Lax gösterimi

$$\begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix} = \frac{E(\mathcal{R}) - E(p)}{\mathcal{R} - p}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \tag{9.39}$$

burada

$$\frac{E(\mathcal{R})-E(p)}{\mathcal{R}-p}=E_1+E_2(\mathcal{R}+p)+E_3(\mathcal{R}^2+\mathcal{R}p+p^2)+... \tag{9.40}$$

Sonra A için

$$A=-\frac{1}{2}E(p)-i\kappa^2\left(\int^x\bar{\psi},-\int^x\psi\right)\frac{E(\mathcal{R})-E(p)}{\mathcal{R}-p}\begin{pmatrix}\psi\\ \bar{\psi}\end{pmatrix} \tag{9.41}$$

buluruz. Denklemler (9.39),(9.41) genel integrallenebilir NLS hiyearşi modelinin (9.38) Lax gosterimini verir. Dispersiyonun özel şekli $E=E(p)$ fiziksel problemle giderildi.

9.2.3 Göreli NLS denklemleri

$E=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$ şeklindeki dispersiyon, integrallenebilen bir göreli doğrusal olmayan Schrödinger denklemi verir

$$i\sigma_3\begin{pmatrix}\psi\\ \bar{\psi}\end{pmatrix}_t=mc^2\sqrt{1+\frac{1}{m^2c^2}\mathcal{R}^2}\begin{pmatrix}\psi\\ \bar{\psi}\end{pmatrix}. \tag{9.42}$$

ve buradaki karekök operatörü için formal kuvvet serisi kullanıldığında, aşağıdaki elde edilir

$$i\sigma_3\begin{pmatrix}\psi\\ \bar{\psi}\end{pmatrix}_t=mc^2\left(1+\frac{1}{2m^2c^2}\mathcal{R}^2-\frac{1}{8m^4c^4}\mathcal{R}^4+\frac{1}{16m^6c^6}\mathcal{R}^6\pm...\right)\begin{pmatrix}\psi\\ \bar{\psi}\end{pmatrix}. \tag{9.43}$$

Denklem (9.42) için bir sonraki doğrusal problemimiz var

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{i}{2}p & -\kappa^2\bar{\psi}\\ \psi & \frac{i}{2}p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}, \tag{9.44}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-iA & -\kappa^2\bar{C}\\ C & -iA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}, \tag{9.45}$$

ve burada

$$\begin{pmatrix}C\\ \bar{C}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{m^2c^4+\mathcal{R}^2c^2}-\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}}{\mathcal{R}-p}\begin{pmatrix}\psi\\ \bar{\psi}\end{pmatrix} \tag{9.46}$$

$$A = -\frac{1}{2}\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - \tag{9.47}$$

$$-i\kappa^2 \left(\int^x \bar{\psi}, -\int^x \psi \right) \frac{\sqrt{m^2c^4 + \mathcal{R}^2c^2} - \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}}{\mathcal{R} - p} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \tag{9.48}$$

Ayrıca, spektral parametre p klasik ivme anlamını taşır.

9.2.4 q-Doğrusal olmayan Schrödinger denklemi

Dogrusal simetrik q-Schödinger denklemi için dispersiyon formülü p^2 serisine açılır

$$E(p) = \frac{1}{\sinh\lambda} \sinh\left(\lambda \frac{p^2}{2m}\right) = \frac{\lambda}{\sinh\lambda}\frac{p^2}{2m} + \frac{\lambda^3}{3!\sinh\lambda}\left(\frac{p^2}{2m}\right)^3 + ... \tag{9.49}$$

ve şekilsel kuvvet serisi olarak doğrusal q-Schrödinger denklemini oluşturmak için kullanılabilir

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \frac{\lambda^3}{3!\sinh\lambda}\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^3 + ...\right]\psi \tag{9.50}$$

Bu denklemin iki karmaşık eşlenik halini bir araya getirdiğimiz sistem aşağıdaki gibi olur

$$i\sigma_3 \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}_t = \frac{1}{\sinh\lambda} \sinh\left(-\frac{\lambda\hbar^2}{2m}\left(i\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right) \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \tag{9.51}$$

Yukarıda açıklanan genel yol izlenerek ve türev oepratörü değiştirilerek $\mathcal{R}_0 = i\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}$ tam yineleme operatörüne $\mathcal{R}$ bir ivme olarak,(9.27) de bir integrallenebilir doğrusal olmayan q-Schrödinger denklemi (q-nls) elde edilmiştir.

$$i\sigma_3 \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}_t = \frac{1}{\sinh\lambda} \sinh\left(-\frac{\lambda\hbar^2}{2m}\mathcal{R}^2\right) \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \tag{9.52}$$

Denklem (9.52) için bir sonraki doğrusal problemimiz (Lax Gosterimi)

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}p & -\kappa^2\bar{\psi} \\ \psi & \frac{i}{2}p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{9.53}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iA & -\kappa^2\bar{C} \\ C & -iA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \tag{9.54}$$

burada

$$\begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix} = \frac{\sinh \frac{\lambda}{2m}\mathcal{R}^2 - \sinh \frac{\lambda}{2m}p^2}{(\mathcal{R}-p)\sinh\lambda} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \tag{9.55}$$

$$A = -\frac{1}{2}\sinh\frac{\lambda}{2m}p^2 - \tag{9.56}$$

$$-i\kappa^2 \left(\int^x \bar{\psi}, -\int^x \psi\right) \frac{\sinh \frac{\lambda}{2m}\mathcal{R}^2 - \sinh \frac{\lambda}{2m}p^2}{(\mathcal{R}-p)\sinh\lambda} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \tag{9.57}$$

Bu denklem için seri açılımını yazabiliriz

$$i\sigma_3 \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}_t - \frac{\hbar^2}{2m}\mathcal{R}^2 \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(\ln q)^{2k}}{(2k+1)!} B_{2k+1}\left(\frac{I}{2} + \frac{\hbar^2}{4m}\mathcal{R}^2\right) \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix},$$

ve bu NLS denklemi için q-düzeltmelerini verir, ($\hbar = 1$, $m = 1/2$),

$$\begin{pmatrix} i\psi_t + \psi_{xx} + 2\kappa^2|\psi|^2\psi \\ -i\bar{\psi}_t + \bar{\psi}_{xx} + 2\kappa^2|\psi|^2\bar{\psi} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(\ln q)^{2k}}{(2k+1)!} B_{2k+1}\left(\frac{I}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{R}^2\right) \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix},$$

öyle ki $\ln q'$nun herhangi bir kuvveti için integrallenebilirligini korur. Lax çifti aynı yolla genişletilebilir.

9.2.5 Göreli DNLS ve Kaup-Newell Hiyerarşisi

Detaylar [36] numaralı makalede. Kaup-Newel Hiyerarşisinin yineleme operatörü aşağıdaki gibidir

$$L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\partial - r\partial^{-1}q\partial & -r\partial^{-1}r\partial \\ -q\partial^{-1}q\partial & \partial - q\partial^{-1}r\partial \end{pmatrix}. \tag{9.58}$$

ve SL(2,R) KN hiyerarşisinin N-inci akışını belirler

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{t_N} = JL^N \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}, \tag{9.59}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.60}$$

Dogrusal problem için

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{L^{N+1} - \lambda^{N+1}}{L-\lambda} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \tag{9.61}$$

$$A = \lambda^{N+1} + (\partial^{-1}q, -\partial^{-1}r)\lambda L\frac{L^N - \lambda^N}{L-\lambda} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \tag{9.62}$$

9.2.6 Keyfi Dispersiona sahip ve rezonant KN hiyerarşisi

Bu hiyerarşi tarafından belirlenen yeni bir zaman değişkeni t tanımlayalım

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{N=0}^{\infty} \nu_N \frac{\partial}{\partial t_N}. \tag{9.63}$$

O halde, hareket denklemlerini yazabiliriz

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = \sum_{N=0}^{\infty} \nu_N \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{t_N} = J \sum_{N=0}^{\infty} \nu_N L^N \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} \tag{9.64}$$

veya

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = JF(L) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}, \tag{9.65}$$

ve buradaki

$$F(z) = \sum_{N=0}^{\infty} \nu_N z^N \tag{9.66}$$

fonksiyonu $F(L)$ operatörünün sembolüdür. Denkem 9.64)'ye karşılık gelen doğrusal problem

$$\partial_t U - \partial_x V + [U, V] = 0, \tag{9.67}$$

şeklindedir, öyle ki

$$V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} = \sum_{N=0}^{\infty} \nu_N V_N, \tag{9.68}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{LF(L) - \lambda F(\lambda)}{L - \lambda} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}, \tag{9.69}$$

$$A = \lambda F(\lambda) + (\partial^{-1} q, -\partial^{-1} r) \lambda L \frac{F(L) - F(\lambda)}{L - \lambda} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \tag{9.70}$$

9.2.7 DNLS hiyerarşisi ve keyfi dispersiyona sahip DNLS

DNLS hiyerarşisi

$$i\sigma_3 \frac{\partial}{\partial t_N} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = -i\sigma_3 \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M}^N \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \tag{9.71}$$

şeklindedir, ve yineleyen operatör

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\partial - \kappa^2\psi\partial^{-1}\bar{\psi}\partial & -\kappa^2\psi\partial^{-1}\psi\partial \\ -\kappa^2\bar{\psi}\partial^{-1}\bar{\psi}\partial & i\partial - \kappa^2\bar{\psi}\partial^{-1}\psi\partial \end{pmatrix} \tag{9.72}$$

olarak yazılabilir.

Keyfi dispersiyon $E(p)$ ye sahip bir sistem için

$$H(p) = E_0 + E_1 p + E_2 p^2 + ... + E_N p^N + ... \tag{9.73}$$

ilk kuantize edilmiş doğrusal Schrödinger denklemi

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi \tag{9.74}$$

şeklindedir. Bu denkemi karmaşık eşleniği ile birleştirerek

$$i\sigma_3\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = \tag{9.75}$$

$$= \left(E_0 + E_1\left(-i\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}\right) + ... + E_N\left(-i\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}\right)^N + ...\right)\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \tag{9.76}$$

sonuç olarak doğrusal Schrödinger denklemini keyfi dispersiyon için doğrusal olmayan hali olan DNLS (9.73)

$$i\sigma_3\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = -i\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}(2\mathcal{M})^{-1}H(2\mathcal{M})\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \tag{9.77}$$

ve doğrusal problem elde edildi

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa^2\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{H(2\mathcal{M}) - H(2\lambda)}{2\mathcal{M} - 2\lambda}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \tag{9.78}$$

$$A = \frac{1}{2}H(2\lambda) + i\kappa^2(-\partial^{-1}\bar{\psi}, \partial^{-1}\psi)\frac{\lambda H(2\mathcal{M}) - \mathcal{M}H(2\lambda)}{2\mathcal{M} - 2\lambda}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \tag{9.79}$$

9.2.8 Göreli DNLS

Benzer şekilde RDNLS'yi

$$i\sigma_3\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = -i\sigma_3\frac{\partial}{\partial x}\frac{mc^2}{2}\mathcal{M}^{-1}\sqrt{1 + \frac{4}{m^2c^2}\mathcal{M}^2}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \tag{9.80}$$

ve ilgili doğrusal problemi şöyle buluruz

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa^2\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} mc^2 \frac{\sqrt{1+\frac{4}{m^2c^2}\mathcal{M}^2} - \sqrt{1+\frac{4}{m^2c^2}\lambda^2}}{2\mathcal{M} - 2\lambda} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \quad (9.81)$$

$$A = \frac{1}{2}mc^2\sqrt{1+\frac{4}{m^2c^2}\lambda^2} + \quad (9.82)$$

$$+i\kappa^2(-\partial^{-1}\bar{\psi}, \partial^{-1}\psi)mc^2 \frac{\lambda\sqrt{1+\frac{4}{m^2c^2}\mathcal{M}^2} - \mathcal{M}\sqrt{1+\frac{4}{m^2c^2}\lambda^2}}{2\mathcal{M} - 2\lambda} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \quad (9.83)$$

9.3 Hirota bilinear yöntemi ile j-NLS'nin rezonant soliton çözümleri

Rezonant NLS denklemi hiberbolik kompleks sayılarını kullanılarak j-NLS denklemi olarak gösterilebilir

$$ju_t = u_{xx} + \frac{\kappa}{2}|u|^2 u, \quad \kappa|u| > 0, \quad \kappa = \pm 1. \quad (9.84)$$

Burada $|u|^2 = u\bar{u}$, $u = u_1 + ju_2$ ve $\bar{u} = u_1 - ju_2$ dir. Daha sonra $u = g/f$ değişken değiştirme ile Hirota denklemlerinin çiftine indirgenir

$$(jD_t - D_x^2)(g \cdot f) = 0$$

$$D_x^2(f \cdot f) = \frac{\kappa}{2} g \cdot \bar{g}, \quad g \cdot \bar{g} > 0$$

öyle ki bir ve iki rezonant hiperbolik zarf soliton çözümleri bulunabilir.

Bölüm 10

Bulgular ve Tartışmalar V: Parametrik kuantum osilatörün çözümleri ve kuantum dinamik simetrisi

10.1 Sönümlü parametrik kuantum osilatörler

Bu bölümde zamana bağlı kütle ve frekansa sahip sönümlü kuantum osilatör problemini inceliyoruz. Bu model için Schrödinger denklemi aşağıdaki gibidir

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu(t)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\mu(t)\omega^2(t)}{2}x^2\Psi. \tag{10.1}$$

Burada $\mu(t) = mf(t)$ kütle parametresi, m karakteristik kütle ve $f(t)$ zamana bağlı keyfi bir fonksiyondur. Ayrıca $\omega(t) = \omega_0 g(t)$ parametrik frekans, ω_0 karakteristik frekans ve $g(t)$ zamana bağlı keyfi bir fonksiyondur.

10.1.1 Dinamik simetri

Parametrik osilatör problemini çözmek için Bölüm 4'teki gibi dinamik simetri yaklaşımını kullanacağız. Verilen Schrödinger operatörü için

$$S = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2\mu(t)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\mu(t)\omega^2(t)}{2}x^2 \tag{10.2}$$

aşağıdaki şartı sağlayan $A(t)$ operatörünü arıyoruz

$$[S, A] = 0. \tag{10.3}$$

Bu koşul, (10.2) denklemin çözümleri arasında ilişki verir,

$$S\psi(x,t) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; S(A\psi(x,t)) = 0.$$

Ayrıca $A(t)$ operatörüne kuantum integrali denir ve

$$i\hbar \frac{\partial A}{\partial t} = [H(t), A] \tag{10.4}$$

denklemini sağlar. Hermityen eşleniği A^+ aynı denklemi sağlar

$$i\hbar \frac{\partial A^+}{\partial t} = [H(t), A^+]. \tag{10.5}$$

Doğrusal osilatörün yaratma ve yok etme operatörlerinin yapısının motivasyonuyla, x ve momentum $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ koordinatında doğrusal olan operatörleri arıyoruz

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(b(t)x + i\hbar B(t)\frac{d}{dx}\right) \tag{10.6}$$

$$A^+(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\bar{b}(t)x + i\hbar \bar{B}(t)\frac{d}{dx}\right). \tag{10.7}$$

Eşitlik (10.4) nedeniyle fonksiyonlar

$$\dot{b} = -\mu(t)\omega^2(t)B, \quad \dot{B} = \frac{1}{\mu(t)}b \tag{10.8}$$

denklemlerine tabidir. Bu sistem ayrıştırılmış klasik sönümlü parametrik osilatör denklemlerini verir

$$\ddot{b} - \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu} + 2\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)\dot{b} + \omega^2(t)b = 0 \tag{10.9}$$

$$\ddot{B} + \frac{\dot{\mu}}{\mu}\dot{B} + \omega^2(t)B = 0 \tag{10.10}$$

ve $b(t)'$ yi yerine yazarak, sadece $B(t)$'ye bağlı olan simetri operatörlerini elde ederiz:

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\mu(t)\dot{B}(t)x + i\hbar B(t)\frac{d}{dx}\right) \tag{10.11}$$

$$A^{+}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\mu(t)\dot{\bar{B}}(t)x + i\hbar\bar{B}(t)\frac{d}{dx}\right). \tag{10.12}$$

Bu operatörlerin komütatörü

$$[A(t), A^{+}(t)] = i\frac{\mu(t)}{2}(B\dot{\bar{B}} - \dot{B}\bar{B}) \tag{10.13}$$

(10.10)'in karmaşık çözümlerinin Wronskian fonksiyonu

$$W(t) = B\dot{\bar{B}} - \dot{B}\bar{B} = \begin{vmatrix} B & \bar{B} \\ \dot{B} & \dot{\bar{B}} \end{vmatrix} \tag{10.14}$$

tarafından belirlenir,

$$W(t) = -i\frac{C}{\mu(t)}.$$

Keyfi gerçel sayıyı $C = 2$ olarak alırsak, Wronskian

$$W(t) = -i\frac{2}{\mu(t)} \tag{10.15}$$

olur, ve bozonik komütatör ilişkisini verir

$$[A(t), A^{+}(t)] = I. \tag{10.16}$$

W küresel ölçü dönüşümünde $B \to e^{i\gamma}B$, $\bar{B} \to e^{-i\gamma}\bar{B}$, $\gamma = sabit$, değişmez olduğu için, bu komütatör ilişkisinde A ve A^{+} operatörleri bu küresel ölçü faktörüne $A \to e^{i\gamma}A$, $A^{+} \to e^{-i\gamma}A^{+}$ kadar belirlenir.

Önerme: Klasik sönümlü parametrik osilatör denkleminin (10.10), Wronskian (10.15) koşulunu sağlayan her bir karmaşık çözümü, bosonik komütasyon ilişkisini (10.16) sağlayan kuantum dinamik simetri operatörleri A ve A^{+}'yı belirler.

Karmaşık çözüm ve Ermakov-Pinney denklemi

Denklem (5.10)'un herhangi bir karmaşık çözümü

$$B(t) = |B(t)|e^{iS(t)} \tag{10.17}$$

şeklinde yazılabilir, öyle ki modülü ve fazı aşağıdaki denklemleri sağlamaktadır

$$\frac{|\ddot{B}|}{|B|} + \frac{\dot{\mu}}{\mu}\frac{|\dot{B}|}{|B|} + \omega^2(t) - \dot{S}^2 = 0 \tag{10.18}$$

$$\ddot{S} + \frac{\dot{\mu}}{\mu}\dot{S} + 2\dot{S}\frac{|\dot{B}|}{|B|} = 0. \tag{10.19}$$

Bu durumda komütatör (10.13)'ün aşağıdaki gibi olur

$$[A(t), A^{+}(t)] = \mu|B|^{2}\dot{S}. \tag{10.20}$$

İkinci denklemin integralinin, $\mu|B|^{2}\dot{S} = C$ kombinasyonunun zamandan bağımsız sabit olduğunu vermesi ile bu komütatörün sabit olduğunu gösterir. Bu komütatörde A ve A^{+} operatörlerini sabit $\sqrt{C}$ ile yeniden ölçeklendirerek, $C = 1$ haliyle ilgili düşünceyi sınırlamak mümkündür. Sonuç olarak

$$\dot{S} = \frac{1}{\mu|B|^{2}} \quad \rightarrow \quad S(t) = \int^{t} \frac{d\tau}{\mu(\tau)|B(\tau)|^{2}} \tag{10.21}$$

elde ederiz, ve aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem: Eğer $|B|$ Ermakov-Pinney denkleminin çözümü ise

$$|\ddot{B}| + \frac{\dot{\mu}}{\mu}|\dot{B}| + \omega^{2}(t)|B| - \frac{1}{\mu^{2}|B|^{3}} = 0, \tag{10.22}$$

aşağıdaki

$$B(t) = |B(t)| \exp i \int^{t} \frac{d\tau}{\mu(\tau)|B(\tau)|^{2}} \tag{10.23}$$

karmaşık fonksiyonu, (10.16) bozonik komütasyon ilişkisi ile kuantum dinamik simetri operatörlerini, A,A^{+}, belirler. Ancak (10.22) denklemi doğrusal değildir, bu nedenle doğrusal sönümlü osilatör denklemini çözmek daha kolay olur.

Karmaşık çözüm ve ilişkili ikinci çözüm

Sönümlü parametrik osilatör denkleminin karmaşık çözümleri, iki bağımsız gerçel çözüm olan $B_1(t)$ ve $B_2(t)$ 'nin doğrusal kombinasyonu ile gösterilebilir

$$B(t) = c_1 B_1(t) + c_2 B_2(t), \tag{10.24}$$

c_1 ve c_2 keyfi karmaşık sabit. Bu durumda, karmaşık fonksiyonlar için Wronskian

$$W(t) = (c_1\bar{c}_2 - c_2\bar{c}_1)W_{12}(t)$$

olup, gerçek çözümler için Wronskian aşağıdaki gibidir

$$W_{12}(t) = B_1\dot{B}_2 - \dot{B}_1 B_2 = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ \dot{B}_1 & \dot{B}_2 \end{vmatrix}. \tag{10.25}$$

Önerme: $B_1(t)$ denklem (10.10)'in bir çözümü ise

$$B_2(t) = B_1(t)\int^t \frac{d\tau}{\mu(\tau)(B_1(\tau))^2} \tag{10.26}$$

ikinci bağımsız çözümdür.

Sonuç 1: B_1 ve (10.26) ile belirlenen B_2'nin Wronskian

$$W_{12}(t) = \frac{1}{\mu(t)}.$$

Sonuç 2: Karmaşık Wronskian belirteci için c_1 ve c_2 sabitleri aşağıdaki ilişki ile belirlenir

$$c_1\bar{c}_2 - c_2\bar{c}_1 = -2i.$$

Bu ilişki, $c_1 \to c_1 e^{i\gamma}$, $c_2 \to c_2 e^{i\gamma}$ dönüşümü altında değişmez. Bu özgürlükten kurtulmak için örneğin $c_1 = \bar{c}_1$'i gerçel sayı olarak alabiliriz, ve bu durumda

$$c_2 = \Re c_2 + \frac{i}{c_1}$$

olur.

Yukarıda verilen bilgileri birleştirerek, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Teorem: Eğer $B_1(t)$

$$\ddot{B} + \frac{\dot{\mu}}{\mu}\dot{B} + \omega^2(t)B = 0$$

denklemin bir gerçel çözümü ise, karmaşık çözüm olan

$$B(t) = aB_1(t) + (b + \frac{i}{a})B_1(t)\int^t \frac{d\tau}{\mu(\tau)(B_1(\tau))^2}$$

a ve b'nin keyfi gerçel sayılar olmak şartı ile, aşağıdaki komütatörü sağlayan

$$[A(t), A^+(t)] = I$$

simmetri operatörlerini belirler. Ayrıca, $B_1(t)$ çözümü keyfi bir sabite kadar belirlendiği için, $a = 1$' olarak alabiliriz ve bu durumda

$$B(t) = B_1(t) + (b+i)B_1(t)\int^t \frac{d\tau}{\mu(\tau)(B_1(\tau))^2} \tag{10.27}$$

or

$$B(t) = B_1(t)\left(1 + (b+i)\int^t \frac{d\tau}{\mu(\tau)(B_1(\tau))^2}\right). \tag{10.28}$$

Harmonik osilatör

Bu modelde, frekans $\omega(t) = \omega_0$ ve kütle $\mu(t) = m$ sabittir. Karmaşık fonksiyon

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{m\omega_0}}\, e^{i\omega_0 t} \tag{10.29}$$

aşağıdaki denklemin

$$\ddot{B} + \omega_0^2 B = 0 \tag{10.30}$$

çözümüdür ve dinamik simetri operatörlerini verir

$$A(t) = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} e^{i\omega_0 t}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{d}{dx}\right) = e^{i\omega_0 t} a \tag{10.31}$$

$$A^+(t) = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} e^{-i\omega_0 t}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{d}{dx}\right) = e^{-i\omega_0 t} a^+. \tag{10.32}$$

Burada

$$a = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{d}{dx}\right) \tag{10.33}$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{d}{dx}\right) \tag{10.34}$$

ve

$$[A(t), A^+(t)] = [a, a^+] = I.$$

Dolayısıyla, $N(t) = A^+(t)A(t) = a^+a$ parçaçık sayısı operatörüdür, a ve a^+ - yaratma ve yok etme operatörleri, ve $A(t) = e^{i\omega_0 t}a$, $A^+(t) = e^{-i\omega_0 t}a^+$ - quantum integralleridir.

Caldirola-Kanai Sönümlü Osilatörü

Caldirola-Kanai kuantum modeli için klasik hareket denklemi

$$\ddot{B} + \Gamma \dot{B} + \omega_0^2 B = 0, \tag{10.35}$$

olur. Buradaki parametreler sabit sönümleme Γ, sabit frekans $\omega(t) = \omega_0$, ve zamana bağlı kütle $\mu(t) = me^{\Gamma t}$dir. Az sönümlü (under damping) hal $\Gamma < 2\omega_0$ için, karmaşık çözüm

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{m\Omega}} \, e^{-\frac{1}{2}\Gamma t + i\Omega t} \tag{10.36}$$

olur, ve

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}.$$

Dolayısıyla, simetri operatörleri aşağıdaki gibi bulunur

$$A(t) = \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}} e^{i\Omega t} \left(e^{\frac{1}{2}\Gamma t}(1 - i\frac{\Gamma}{2\Omega})x + \frac{\hbar}{m\Omega} e^{-\frac{1}{2}\Gamma t} \frac{d}{dx} \right) \tag{10.37}$$

$$A^+(t) = \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}} e^{-i\Omega t} \left(e^{\frac{1}{2}\Gamma t}(1 + i\frac{\Gamma}{2\Omega})x - \frac{\hbar}{m\Omega} e^{-\frac{1}{2}\Gamma t} \frac{d}{dx} \right). \tag{10.38}$$

Bessel Sönümlü Osilatörü

Bessel türünden parametrik ve sönümlü osilatör için Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2\mu_0 t} + \frac{\mu_0 \omega_0^2}{2} \left(t - \frac{a^2}{t} \right) x^2 \tag{10.39}$$

şeklindedir. Burada parametreler

$$\mu(t) = \mu_0 t, \;\; \omega^2(t) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2} \right) \tag{10.40}$$

ve hareket denklemi de

$$\ddot{x} + \frac{1}{t}\dot{x} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{t^2} \right) x = 0 \tag{10.41}$$

olur. Eğer $\tau = \omega_0 t$, $\nu^2 = a^2\omega_0^2$ olarak tanımlanırsa, hareket denklemi

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{d\tau} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\tau^2} \right) x = 0 \tag{10.42}$$

veya Bessel diferansiyel denklemini

$$\tau^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + \tau \frac{dx}{d\tau} + \left(\tau^2 - \nu^2\right) x = 0 \tag{10.43}$$

elde ederiz. Eğer $\omega_0 = 1$ alırsak, Bessel denklemi

$$t^2 \ddot{B} + t\dot{B} + (t^2 - \nu^2)B = 0 \tag{10.44}$$

için karmaşık çözümler Hankel fonksiyonları cinsinden bulunur

$$B(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} H_\nu^{(1)}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (J_\nu(t) + iN_\nu(t)) \tag{10.45}$$

$$\bar{B}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} H_\nu^{(2)}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (J_\nu(t) - iN_\nu(t)). \tag{10.46}$$

Yineleme ilişkileri

$$H_{\nu-1}(t) + H_{\nu+1}(t) = \frac{2\nu}{t} H_\nu(t), \quad H_{\nu-1}(t) - H_{\nu+1}(t) = 2\dot{H}_\nu(t)$$

ve

$$\dot{H}_\nu(t) = H_{\nu-1} - \frac{\nu}{t} H_\nu(t)$$

nedeniyle, Wronksian belirteci gereken koşulu sağlıyor

$$W(t) = \frac{\pi}{2} \begin{vmatrix} H_\nu^{(1)}(t) & H_\nu^{(2)}(t) \\ \dot{H}_\nu^{(1)}(t) & \dot{H}_\nu^{(2)}(t) \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2} \begin{vmatrix} H_\nu^{(1)}(t) & H_\nu^{(2)}(t) \\ H_{\nu-1}^{(1)}(t) & H_{\nu-1}^{(2)}(t) \end{vmatrix} = \frac{-2i}{t}.$$

Bu durumda simetri operatörlerini

$$A(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\hbar}} \left(t\dot{H}_\nu^{(1)}(t)x + i\hbar H_\nu^{(1)}(t) \frac{d}{dx} \right) \tag{10.47}$$

$$A^+(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\hbar}} \left(t\dot{H}_\nu^{(2)}(t)x + i\hbar H_\nu^{(2)}(t). \frac{d}{dx} \right) \tag{10.48}$$

olarak bulduk.

10.2 Dinamik simetri ve Schrödinger denkleminin çözümü

Vakum durumunu

$$A(t)|0,t\rangle = 0 \tag{10.49}$$

olarak tanımlıyoruz ve koordinat gösteriminde

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\mu(t)\dot{B}(t)x + i\hbar B(t)\frac{d}{dx}\right)\langle x|0,t\rangle = 0 \tag{10.50}$$

yazabiliriz. Bu denklemin çözümleri

$$\psi_0(x,t) = \langle x|0,t\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mu(t)\frac{\dot{B}(t)}{B(t)}\frac{x^2}{2} + F(t)\right), \tag{10.51}$$

$F(t)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere, dalga fonksiyonlarını verir. Bu fonksiyon $\psi_0(x,t)$ aynı zamanda Schrödinger denklemi

$$S\psi_0 = 0$$

için de bir çözüm olması için $F = C - \frac{1}{2}\ln B(t)$ olarak seçilebilir. Böylece sıradaki sonucu elde ediyoruz.

Önerme: Dalga fonksiyonu

$$\psi_0(x,t) = \frac{C}{\sqrt{B(t)}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mu(t)\frac{\dot{B}(t)}{B(t)}\frac{x^2}{2}\right),$$

aşağıdaki denklemleri sağlar

$$A(t)\psi_0(x,t) = 0, \quad S\psi_0(x,t) = 0.$$

Bu fonksiyonun normalleştirilmesi

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_0(x,t)|^2 dx = 1$$

(10.10)'in karmaşık çözümünü

$$\psi_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi\hbar}B(t)}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mu(t)\frac{\dot{B}(t)}{B(t)}\frac{x^2}{2}\right), \tag{10.52}$$

$$B(t) = |B(t)| \exp i \int^t \frac{d\tau}{\mu(\tau)|B(\tau)|^2}$$

olarak verir.

$A(t)$ ve $A^+(t)$ operatörlerinin simetri operatörleri olması nedeniyle, $\psi_0 \to A^+(t)\psi_0$ Schrödinger denkleminin çözümünü verir. $A^+(t)$ operatörünü n-kere uygularsak Schrödinger denklemi için çözüm buluruz

$$|n,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(A^+(t))^n|0,t\rangle, n = 1,2,3,.... \tag{10.53}$$

Koordinat gösteriminde

$$\langle x|n,t\rangle \equiv \psi_n(x,t)$$

dalga fonksiyonu

$$\psi_n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2^n \hbar^{n+\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} n! B(t)}} \left(\mu(t)\dot{\bar{B}}(t)x + i\hbar\bar{B}(t)\frac{d}{dx}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mu(t)\frac{\dot{B}(t)}{B(t)}\frac{x^2}{2}\right) \tag{10.54}$$

şeklinde olur, ve Hermite polinomları cinsinden yazılabilir

$$\psi_n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2^n \hbar^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} n! B(t)}} \left(\frac{\bar{B}(t)}{|B(t)|}\right)^n H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\hbar}|B(t)|}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mu(t)\frac{\dot{B}(t)}{B(t)}\frac{x^2}{2}\right). \tag{10.55}$$

Karşılık gelen olasılık yoğunlukları da

$$\rho_0(x,t) = |\psi_0(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}|B(t)|} \exp\left(-\frac{x^2}{\hbar|B(t)|^2}\right), \tag{10.56}$$

$$\rho_n(x,t) = |\psi_n(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}2^n n!|B(t)|} H_n^2\left(\frac{x}{\sqrt{\hbar}|B(t)|}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{\hbar|B(t)|^2}\right) \tag{10.57}$$

şeklinde bulunur.

10.2.1 Köklerin hareketi

$\lambda_s(n)$, $s = 1, ..., n$ Hermite polinomunun s'inci kökü olsun

$$H_n(\lambda_s(n)) = 0. \tag{10.58}$$

Dolayısıyla, dalga fonksiyonun her kökü

$$x_s(t;n) = \sqrt{\hbar}\lambda_s(n)|B(t)| \tag{10.59}$$

denklemine göre hareket eder ve buradaki $|B(t)|$ Ermakov-Pinney denkleminin çözümüdür

$$|\ddot{B}| + \frac{\dot{\mu}}{\mu}|\dot{B}| + \omega^2(t)|B| - \frac{1}{\mu^2|B|^3} = 0.$$

Bu nedenle, dalga fonksiyonun her kökü, kuantum potansiyeline sağhip sönümlü parametrik osilatör denklemini sağlar

$$\ddot{x} + \frac{\dot{\mu}}{\mu}\dot{x} + \omega^2(t)x = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\hbar^2}{2\mu^2}\frac{\lambda_s^4}{x^2}\right).$$

10.3 Parametrik koherent (eş uyumlu) durumlar

$|n,t\rangle$ durumları, kuantum integrali olan sayı operatörünün normalize edilmiş özdurumlarıdır

$$N(t) = A^+(t)A(t),$$
$$N(t)|n,t\rangle = n|n,t\rangle. \tag{10.60}$$

Burada

$$A(t)|n,t\rangle = \sqrt{n}|n-1,t\rangle, \quad A^+(t)|n,t\rangle = \sqrt{n+1}|n+1,t\rangle \tag{10.61}$$

denklemlerini sağlar. Yer değiştirme operatörüyle

$$D(\alpha,t) = e^{\alpha A^+(t) - \bar{\alpha}A(t)} \tag{10.62}$$

koherent durumlarını tanımlayabiliriz

$$|\alpha,t\rangle = D(\alpha,t)|0,t\rangle. \tag{10.63}$$

Bu koherent durumlar aynı zamanda $A(t)$ operatörün özdurumlarıdır

$$A(t)|\alpha,t\rangle = \alpha|\alpha,t\rangle. \tag{10.64}$$

Aşağıdaki faktorizasyonu kullanırsak

$$D(\alpha,t) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha A^+(t)}e^{-\bar{\alpha}A(t)}$$

koherent durumlar

$$|\alpha, t\rangle = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}} e^{\alpha A^+(t)} |0, t\rangle \qquad (10.65)$$

şeklinde olur, ve açık olarak yazılır

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n, t\rangle. \qquad (10.66)$$

Koordinat gösteriminde, koherent durumların dalga fonksiyonu

$$\langle x|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle x|n, t\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x, t), \qquad (10.67)$$

olur, veya

$$\langle x|\alpha, t\rangle = \frac{e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}}{(\pi\hbar)^{1/4}\sqrt{B(t)}} \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\mu\frac{\dot{B}}{B}x^2 - 2i\frac{\alpha}{\sqrt{2\hbar}B}x, + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\bar{B}}{B}\right). \qquad (10.68)$$

veya

$$\langle x|\alpha, t\rangle = \frac{e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}}{(\pi\hbar)^{1/4}\sqrt{B(t)}} \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\mu\frac{\dot{B}}{B}\left(x - \frac{\sqrt{2\hbar}\,\alpha}{\mu\dot{B}}\right)^2 - i\frac{\alpha^2}{\mu B\dot{B}} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\bar{B}}{B}\right). \qquad (10.69)$$

Olasılık yoğunlukları Gaussian şeklindedir

$$\rho_\alpha(x, t) = |\langle x|\alpha, t\rangle|^2 = \frac{1}{(\pi\hbar)^{1/2}|B(t)|} \exp\left(-\frac{1}{\hbar|B(t)|^2}(x - \sqrt{2\hbar}\Im(\alpha\bar{B}(t)))^2\right). \qquad (10.70)$$

Önerme: Gaussian dalga paketinin merkezi (10.70)

$$x_0(t) = \sqrt{2\hbar}\Im(\alpha\bar{B}(t)) \qquad (10.71)$$

sönümlü parametrik osilatörün denklemini

$$\ddot{x}_0(t) + \frac{\dot{\mu}}{\mu}\dot{x}_0(t) + \omega^2(t)x_0(t) = 0 \qquad (10.72)$$

takip ederek hareket eder. Aynı zamanda, karmaşık fonksiyon

$$\alpha(t) = \sqrt{m\omega_0}\,\alpha\,\bar{B}(t) \qquad (10.73)$$

(10.72) ile verilen denklemin çözümüdür.

Harmonik osilatör

Sabit frekans $\omega(t) = \omega_0$ ve kütle $\mu(t) = m$ için karmaşık çözüm

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{m\omega_0}} e^{i\omega_0 t}$$

şeklindedir, taban durum

$$\psi_0(x,t) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}i\omega_0 t} e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2} \tag{10.74}$$

ve n-dalga fonksiyonları

$$\psi_n(x,t) = \frac{1}{i^n\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-i\omega_0(n+\frac{1}{2})t} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2} \tag{10.75}$$

şeklinde olur. Karşılık gelen olasılık yoğunlukları

$$\rho_0(x,t) = |\psi_0(x,t)|^2 = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega_0}{\hbar},x^2} \tag{10.76}$$

$$\rho_n(x,t) = |\psi_n(x,t)|^2 = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} H_n^2\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m\omega_0}{\hbar}x^2} \tag{10.77}$$

olarak bulunur. Koherent durumlar için dalga fonksiyonu

$$\langle x|\alpha,t\rangle = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha(t)|^2} e^{-\frac{1}{2}i\omega_0 t} e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}x^2 - 2ix\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\alpha(t) + \frac{1}{2}\alpha^2(t)}, \tag{10.78}$$

$$\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega_0 t}, \tag{10.79}$$

şeklinde bulunur ve Gaussian yoğunluk paketi

$$\rho_\alpha(x,t) = |\langle x|\alpha,t\rangle|^2 = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}\left(x - \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}}\Im(\alpha(t))\right)^2} \tag{10.80}$$

klasik parçacık gibi salınım yapar

$$x(t) = -\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}}|\alpha| \sin(\omega_0 t - \arg\alpha), \tag{10.81}$$

$\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega_0 t}$' de karmaşık düzlemde dönme hareketi yapar.

Caldirola-Kanai sönümlü osilatör

Taban dalga fonksiyonu

$$\psi_0(x,t) = \left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-i\frac{1}{2}\Omega t - i\frac{m\Gamma}{4\hbar}e^{\Gamma t}x^2 + \frac{1}{4}\Gamma t - \frac{m\Omega}{2\hbar}e^{\Gamma t}x^2,\right) \tag{10.82}$$

ve olasılık yoğunluğu

$$\rho_0(x,t) = \left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}\Gamma t - \frac{m\Omega}{\hbar}e^{\Gamma t}x^2\right) = \left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\Gamma t}e^{-\frac{m\Omega}{\hbar}e^{\Gamma t}x^2} \tag{10.83}$$

olarak bulunur, ve limit $t \to \infty$ durumunda Dirac delta funksiyonuna yakınsar: $\lim_{t\to\infty} \rho_(x,t) = \delta(x)$. Tamsayılar için çözümler

$$\psi_n(x,t) = \frac{1}{i^n\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\Gamma}{4}t}e^{-i\Omega(n+\frac{1}{2})t}e^{-i\frac{m\Gamma}{4\hbar}e^{\Gamma t}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}e^{\frac{1}{2}\Gamma t}x\right) e^{-\frac{m\Omega}{2\hbar}x^2e^{\Gamma t}} \tag{10.84}$$

ve olasılıklar aşağıdaki gibi bulunur

$$\rho_n(x,t) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\Gamma}{2}t}H_n^2\left(\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}e^{\frac{1}{2}\Gamma t}x\right) e^{-\frac{m\Omega}{\hbar}x^2e^{\Gamma t}}. \tag{10.85}$$

Olasılık ve Hermite polinomlarının kökleri exponansiyel olarak hareket ederler

$$x_s(t;n) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}}\,\lambda_s(n)e^{-\frac{1}{2}\Gamma t}. \tag{10.86}$$

Koherent durumlar

$$\langle x|\alpha,t\rangle = \left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2+\frac{1}{4}\Gamma t-\frac{1}{2}i\Omega t} \times$$
$$\exp\left(-\frac{im\Gamma}{4\hbar}e^{\Gamma t}x^2 - \frac{m\Omega}{2\hbar}e^{\Gamma t}x^2 - 2i\sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}}\,\alpha\, xe^{\frac{1}{2}\Gamma t-i\Omega t} + \frac{1}{2}\alpha^2e^{-2i\Omega t}\right) \tag{10.87}$$

ve yoğunluk fonksiyonları

$$\rho_\alpha(x,t) = |\langle x|\alpha,t\rangle|^2 = \left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\Gamma t}e^{-\frac{m\Omega}{\hbar}e^{\Gamma t}\left(x-\sqrt{\frac{2\hbar}{m\Omega}}e^{-\frac{1}{2}\Gamma t}\Im(\alpha e^{-i\Omega t})\right)^2} \tag{10.88}$$

şeklinde bulunur. Bunlar Gaussian formundadır ve merkezleri sönümlü klasik denkleme göre hareket ederler

$$x(t) = -\sqrt{\frac{2\hbar}{m\Omega}}|\alpha|e^{-\frac{1}{2}\Gamma t}\sin(\Omega t - \arg\alpha). \tag{10.89}$$

Karmaşık çözüm

$$\alpha(t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\Omega}}\alpha e^{-\frac{1}{2}\Gamma t - i\Omega t}$$

karmaşık düzlemde spiral şeklinde hareketi tasvir eder.

Bessel sönümlü osilatör

Bessel sönümlü osilatör için taban dalga fonksiyonu

$$\psi_0(x,t) = \left(\frac{2}{\pi^2\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{H_\nu^{(1)}(t)}} \exp\left(i\,\frac{\mu_0 t}{2\hbar}\frac{\dot{H}_\nu^{(1)}(t)}{H_\nu^{(1)}(t)}\,x^2\right) \tag{10.90}$$

ve olasılık yoğunlukları

$$\rho_0(x,t) = |\psi_0(x,t)|^2 = \left(\frac{2}{\pi^2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{J_\nu^2(t) + N_\nu^2(t)}} \exp\left(-\frac{2\mu_0}{\pi\hbar}\frac{x^2}{J_\nu^2(t) + N_\nu^2(t)}\right) \tag{10.91}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca, n-parçacık dalga fonksiyonları

$$\psi_n(x,t) = \frac{1}{i^n\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{2}{\pi^2\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{H_\nu^{(1)}(t)}} e^{-in\arctan\frac{N_\nu(t)}{J_\nu(t)}}$$
$$H_n\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\hbar}}\frac{x}{\sqrt{J_\nu^2(t) + N_\nu^2(t)}}\right)\exp\left(i\,\frac{\mu_0 t}{2\hbar}\frac{\dot{H}_\nu^{(1)}(t)}{H_\nu^{(1)}(t)}\,x^2\right) \tag{10.92}$$

ve karşılık gelen olasılık yoğunlukları

$$|\psi_n(x,t)|^2 = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{2}{\pi^2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{J_\nu^2(t) + N_\nu^2(t)}}$$
$$H_n^2\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\hbar}}\frac{x}{\sqrt{J_\nu^2(t) + N_\nu^2(t)}}\right)\exp\left(-\frac{2\mu_0}{\pi\hbar}\frac{x^2}{J_\nu^2(t) + N_\nu^2(t)}\right) \tag{10.93}$$

şeklinde olur.

Bu fonksiyonların kökleri aşağıdaki kurala göre hareket eder Zeros of this function are moving according to law

$$x_s(t;n) = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2}}\lambda_s(n)|H_\nu^{(1)}(t)| = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2}}\lambda_s(n)\sqrt{J_\nu^2(t) + N_\nu^2(t)} \tag{10.94}$$

ve büyük t için asimptotik yaklaşım

$$x_s(t;n) \sim \sqrt{\hbar}\frac{\lambda_s(n)}{\sqrt{t}} \tag{10.95}$$

olur.

Bessel sönümlü osilatör için koherent durumlar

$$\langle x|\alpha, t\rangle = \left(\frac{2}{\pi^2\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}}{\sqrt{H_\nu^{(1)}(t)}}$$

$$\exp\left(\frac{i\mu_0 t}{2\hbar}x^2\frac{\dot{H}_\nu^{(1)}(t)}{H_\nu^{(1)}(t)} - \frac{2i\,\alpha\,x}{\sqrt{\pi\hbar}H_\nu^{(1)}(t)} + \frac{1}{2}\alpha^2\frac{H_\nu^{(2)}(t)}{H_\nu^{(1)}(t)}\right) \tag{10.96}$$

ve yoğunluklar da aşağıdaki gibidir

$$|\langle x|\alpha, t\rangle|^2 = \left(\frac{2}{\pi^2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{J_\nu^2(t) + N_\nu^2(t)}}$$

$$\exp\left(-\frac{2}{\pi\hbar}\frac{(x - \sqrt{\pi\hbar}\Im(\alpha H_\nu^{(2)}(t)))^2}{J_\nu^2(t) + N_\nu^2(t)}\right). \tag{10.97}$$

Bu dalga paketlerinin merkezi Bessel denklemine göre hareket eder

$$x_0(t) = \sqrt{\pi\hbar}(\alpha_2 J_\nu(t) - \alpha_1 N_\nu(t)). \tag{10.98}$$

Özel durumlar için:

1) $\alpha = \alpha_2$ -gerçel sayı

$$x_0(t) = -\sqrt{\pi\hbar}\,\alpha_1\,N_\nu(t)$$

2) $\alpha = i\alpha_2$

$$x_0(t) = \sqrt{\pi\hbar}\,\alpha_2\,J_\nu(t)$$

Complex düzlemde evrim

$$\alpha(t) = \sqrt{\frac{\pi m\omega_0}{2}}\alpha H_\nu^{(2)}(t)$$

şeklindedir.

10.4 Genel Kuadratik ve Parametrik Osilatörde Sıkıştırılmış Durumlar

10.4.1 Genelleştirilmiş Caldirola-Kanai parametrik osilatörde sıkıştırılmış ve rezonans durumları

Bu çalışmada Caldirola-Kanai kuantum parametrik osilatör modeli için Schrödinger denklemi ele alındı

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(q,t) = \hat{H}_g(t)\Psi(q,t). \tag{10.99}$$

Burada, Hamiltonian operatörü Hermityen ve zamana bağlı parametrele sahip

$$\hat{H}_g(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 e^{\gamma t}\hat{q}^2 + \frac{B(t)}{2}(\hat{q}\hat{p}+\hat{p}\hat{q}) - e^{\gamma t}D(t)\hat{q} + e^{-\gamma t}E(t)\hat{p}, \tag{10.100}$$

$\mu(t) = me^{\gamma t}$, $\gamma > 0,\ m = 1,\ B(t),\ D(t),\ E(t)$, gerçel fonksiyonlar, $\hat{q} = q,\ \hat{p} = -i\hbar\partial/\partial q$. Hamiltonyen operatörü Heisenberg-Weyl ve $su(1,1)$ Lie cebirlerin generatörlerinin doğrusal kombinasyonu olduğu için, evrim operatörü Wei-Norman Lie cebirsel yöntemi ile aşağıdaki gibi bulundu

$$\begin{aligned}\hat{U}_g(t,t_0) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{-1}{2\mu(s)}p_p^2(s) - E(s)p_p(s) + \frac{\mu(s)\omega^2(s)}{2}x_p^2(s)\right]ds\right) \\ &\quad \times \exp\left(ip_p(t)q\right) \times \exp\left(-x_p(t)\frac{\partial}{\partial q}\right) \times \exp\left(i\frac{\mu(t)}{2\hbar}\left(\frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} - B(t)\right)q^2\right) \\ &\quad \times \exp\left(\ln\left|\frac{x_1(t_0)}{x_1(t)}\right|\left(q\frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2}\right)\right) \times \exp\left(\frac{i}{2}\hbar x_1^2(t_0)\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right)\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right).\end{aligned}$$

Burada $x_1(t)$, $x_2(t)$ klasik homojen denklemin

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \left(\omega_0^2 - \left(\dot{B} + B^2 + \gamma B\right)\right)x = D + e^{-\gamma t}(\dot{E} + BE), \tag{10.101}$$

ve başlangıç koşullarını $x_1(0) = x_0 \neq 0,\ \dot{x}_1(0) = x_0 B(0)$, ve $x_2(0) = 0,\ \dot{x}_2(0) = 1/x_0$, sağlayan iki bağımsız çözümüdür. Ayrıca $x_p(t)$ (10.101) denklemini ve $x_p(0) = 0,\ \dot{x}_p(0) = E(0)$ koşullarını sağlayan bir çözümdür. Momentum uzayında karşılık gelen klasik denklem

$$\ddot{p} - \gamma\dot{p} + \left(\omega_0^2 + \left(\dot{B} - B^2 - \gamma B\right)\right)p = e^{\gamma t}(\dot{D} - BD) - \omega_0^2 E, \tag{10.102}$$

şeklinde olur, ve onun çözümleri

$$p_1(t) = e^{\gamma t}(\dot{x}_1(t) - B(t)x_1(t)), \quad p_2(t) = e^{\gamma t}\big(\dot{x}_2(t) - B(t)x_2(t)\big)$$

$$p_p(t) = e^{\gamma t}\left(\dot{x}_p(t) - B(t)x_p(t) - e^{-\gamma t}E(t)\right).$$

10.4.2 Zamana bağlı koherent durumlar

Yer değiştirme operatörü

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}), \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in R, \tag{10.103}$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega_0}{2\hbar}}q + \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_0}}\frac{\partial}{\partial q}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_0}{2\hbar}}q - \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_0}}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{10.104}$$

olmak üzere, $\varphi_0(q) = (\omega_0/\pi\hbar)^{1/4}e^{-\frac{\omega_0}{2\hbar}q^2}$ temel duruma uygulandığında, standart harmonik osilatörün koherent durumları bulunur

$$\phi^0_\alpha(q) = \hat{D}(\alpha)\varphi_0(q) = \left(\frac{\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{i}{2\hbar}\langle\hat{q}\rangle_\alpha\langle\hat{p}\rangle_\alpha} e^{\frac{i}{\hbar}\langle\hat{p}\rangle_\alpha q} e^{-\frac{\omega_0}{2\hbar}(q-\langle\hat{q}\rangle_\alpha)^2}, \tag{10.105}$$

$\langle\hat{q}\rangle_\alpha = \sqrt{2\hbar/(\omega_0)}\,\alpha_1,\ \langle\hat{p}\rangle_\alpha = \sqrt{2\omega_0\hbar}\,\alpha_2,\ \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2 \in R.$

Evrim operatörün yardımıyla, zamana bağlı koherent durumlar elde edildi

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(q,t) \quad = \quad & \left(\frac{\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} R_B(t) \times \sqrt{\frac{x_1(t)}{x_0} - i(\omega_0 x_0)x_2(t)} \\
& \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{-e^{-\gamma t}}{2}p_p^2(s) - e^{-\gamma s}E(s)p_p(s) + \frac{e^{\gamma t}\omega_0^2}{2}x_p^2(s)\right)ds\right] \\
& \times \exp\left[-i\omega_0 x_2(t)R_B^2(t)\Big(x_1(t) - i(\omega_0 x_0^2)x_2(t)\Big)\alpha^2 + \frac{\alpha^2 - |\alpha|^2}{2}\right] \\
& \times \exp\left(\frac{i}{\hbar}p_p(t)q\right) \times \exp\left[\frac{-i}{2\hbar}e^{\gamma t}\left(B(t) + \frac{\dot{R}_B(t)}{R_B(t)}\right)(q - x_p(t))^2\right] \\
& \times \exp\left\{-R_B^2(t)\left[\sqrt{\frac{\omega_0}{2\hbar}}(q - x_p(t)) - \left(\frac{x_1(t)}{x_0} - i(\omega_0 x_0)x_2(t)\right)\alpha\right]^2\right\}
\end{aligned}$$

ve olasılık yoğunlukları bulundu

$$\rho_\alpha(q,t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi\hbar}} \times R_B(t) \times \exp\left\{ -\left(\sqrt{\frac{\omega_0}{\hbar}} R_B(t)(q - \langle\hat{q}\rangle_\alpha(t))\right)^2 \right\}.$$

Burada sıkıştırma fonksiyonu $R_B(t)$:

$$R_B(t) = \sqrt{\frac{{x_0}^2}{x_1^2(t) + (\omega_0 {x_0}^2 x_2(t))^2}} \tag{10.106}$$

ve koherent durumlarda ortalamalar

$$\langle\hat{q}\rangle_\alpha(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega_0}}\left(\frac{\alpha_1}{x_0}x_1(t) + \alpha_2(\omega_0 x_0)x_2(t)\right) + x_p(t), \tag{10.107}$$

$$\langle\hat{p}\rangle_\alpha(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega_0}}\left(\frac{\alpha_1}{x_0}p_1(t) + \alpha_2(\omega_0 x_0)p_2(t)\right) + p_p(t) \tag{10.108}$$

şeklinde olur. Açıkça görüldğü gibi koherent durumlar Gaussian dalga paketleridir, ve merkezleri $\langle\hat{q}\rangle_\alpha(t)$ klasik denklemine göre hareket eder. Konum $\hat{q}$ ve momentum $\hat{p}$ için belirsizlikler aşağıdaki gibi olur

$$(\Delta\hat{q})_\alpha(t) \;=\; \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_0}}\frac{1}{R_B(t)}, \tag{10.109}$$

$$(\Delta\hat{p})_\alpha(t) \;=\; \sqrt{\frac{\omega_0\hbar}{2}}R_B(t)\sqrt{1 + \frac{e^{2\gamma t}}{(\omega_0 R_B^2(t))^2}\left(\frac{\dot{R}_B(t)}{R_B(t)} + B(t)\right)^2},$$

$$(\Delta\hat{q})_\alpha(\Delta\hat{p})_\alpha(t) = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 + \frac{e^{2\gamma t}}{(\omega_0 R_B^2(t))^2}\left(\frac{\dot{R}_B(t)}{R_B(t)} + B(t)\right)^2},$$

$(\Delta\hat{q})_\alpha(\Delta\hat{p})_\alpha \geq \hbar/2$.

Bu bölümde incelediğimiz problem *"Squeezing and resonance in a generalized Caldirola-Kanai type quantum parametric oscillator"*, **J. Math. Phys. 59, 082104 (2018)**, adlı makalemizde daha ayrıntılı çalışılmıştır. Sıkıştırma parametresi $B(t)'$ya bağlı olarak tam çözülebilen modeller inşa ettik, ve her bir model için zamana bağlı koherent durumlarda meydana gelen sıkıştırma ve resonans davranışlarını inceledik.

10.4.3 Zamana bağlı sıkıştırılmış koherent durumlar

Uniter sıkıştırma operatörü

$$\hat{S}(z) = \exp\left[\frac{1}{2}\big(z\hat{a}^{\dagger 2} - z^{*}\hat{a}^{2}\big)\right], \quad z = z_1 + iz_2, z_1, z_2 \in R. \tag{10.110}$$

polar koordinatlar $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, cinsinden yazılabilir

$$\hat{S}(r,\theta) = \exp\left[r\left(i\frac{\omega_0}{2\hbar}(\sin\theta)q^2 - (\cos\theta)(q\frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2}) + i\frac{\hbar}{2\omega_0}\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)\right],$$

ve exponansiyel operatörlerin çarpımı olarak bulunabilir

$$\hat{S}(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{\cosh r + \cos\theta\sinh r}} \times \exp\left[\frac{i\omega_0}{2\hbar}\left(\frac{\sin\theta\sinh r}{\cosh r + \cos\theta\sinh r}\right)q^2\right]$$
$$\times \exp\left[-\ln(\cosh r + \cos\theta\sinh r)q\frac{\partial}{\partial q}\right] \times \exp\left[\frac{i\hbar}{2\omega_0}\left(\frac{\sin\theta\sinh r}{\cosh r + \cos\theta\sinh r}\right)\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right].$$

Bu durumda sıkıştırılmış koherent durumlar

$$\chi^0_{\alpha,r,\theta}(q) = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(r,\theta)\varphi_0(q),$$

şeklinde tanımlanır ve açık olarak bulundu

$$\chi^0_{\alpha,r,\theta}(q) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi\hbar}} \times \frac{1}{\sqrt{S^0_{r,\theta}}} \times \exp\big[-i\alpha_1\alpha_2\big] \times \exp\left[-\frac{i}{2}\int_0^r \frac{\sin\theta}{(S^0_{r,\theta})^2}dr\right] \times \exp\left[i\alpha_2\sqrt{\frac{2\omega_0}{\hbar}}q\right]$$
$$\times \exp\left[\frac{i\omega_0}{2\hbar}\sin\theta\sinh(2r)\left(\frac{q - \alpha_1\sqrt{2\hbar/\omega_0}}{S^0_{r,\theta}}\right)^2\right] \times \exp\left[-\frac{\omega_0}{2\hbar}\left(\frac{q - \alpha_1\sqrt{2\hbar/\omega_0}}{S^0_{r,\theta}}\right)^2\right],$$

$$S^0_{r,\theta} = \sqrt{\cosh^2 r + \cos\theta\sinh 2r + \sinh^2 r}. \tag{10.111}$$

Evrim operatörünü kullanarak, zamana bağlı sıkıştırlmış koherent durumlar bulundu

$$
\begin{aligned}
\chi_{\alpha,r,\theta}(q,t) &= \left(\frac{\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{Q_{r,\theta}(t)}} \times \exp\left[-\frac{i}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\omega_0 e^{-\gamma s}ds}{Q^2_{r,\theta}(s)}\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\left(-\frac{e^{\gamma s}}{2}(\dot{x}_p(s)-B(s)x_p(s))^2+\frac{\omega_0^2 e^{\gamma s}}{2}x_p^2(s)\right)ds\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\dot{x}_p(t)-B(t)x_p(t))q\right] \times \exp\left[\frac{ie^{\gamma t}}{2\hbar}\left(\frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)}-B(t)\right)(q-x_p(t))^2\right] \\
&\times \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\left(\frac{\omega_0 x_0}{e^{\pm r}}\right)^2\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\left(\frac{(q-x_p(t))-\sqrt{2\hbar/\omega_0}x_0^{-1}x_1(t)\alpha_1+ie^{\pm r}\alpha_2}{Q_{r,\theta}(t)}\right)^2\right\} \\
&\times \exp\left[-\frac{\omega_0}{2\hbar}\left(\frac{(q-x_p(t))-\sqrt{2\hbar/\omega_0}x_0^{-1}x_1(t)\alpha_1+ie^{\pm r}\alpha_2}{Q_{r,\theta}(t)}\right)^2\right], \qquad (10.112)
\end{aligned}
$$

$$
Q_{r,\theta}(t) = \sqrt{\left(\frac{e^{\pm r}x_1(t)}{x_0}\right)^2 + \left(x_0\omega_0 e^{\mp r}x_2(t)\right)^2}. \qquad (10.113)
$$

Burada genelleştirilmiş sıkıştırma, $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ için verildi. Buna karşılık gelen olasılık yoğunluğu aşağıdaki gibidir

$$
\rho_{\alpha,r,\theta}(q,t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi\hbar}} \times \frac{1}{Q_{r,\theta}(t)} \times \exp\left\{-\left[\sqrt{\frac{\omega_0}{\hbar}}\left(\frac{q-\langle\hat{q}\rangle_\alpha(t)}{Q_{r,\theta}(t)}\right)\right]^2\right\} \qquad (10.114)
$$

Konum ve momentum için ortalama değerler

$$
\langle\hat{q}\rangle_\alpha(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega_0}}\left(\frac{\alpha_1}{x_0}x_1(t)+\alpha_2(\omega_0 x_0)x_2(t)\right)+x_p(t), \qquad (10.115)
$$

$$
\langle\hat{p}\rangle_\alpha(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega_0}}\left(\frac{\alpha_1}{x_0}p_1(t)+\alpha_2(\omega_0 x_0)p_2(t)\right)+p_p(t), \qquad (10.116)
$$

ve belirsizlikler de bulundu

$$
\begin{aligned}
(\Delta\hat{q})_{r,\theta}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_0}}Q_{r,\theta}(t), \\
(\Delta\hat{p})_{r,\theta}(t) &= \sqrt{\frac{\omega_0\hbar}{2}}\frac{1}{Q_{r,\theta}(t)}\sqrt{1+\frac{(e^{\gamma t}Q^2_{r,\theta}(t))^2}{\omega_0^2}\left(\frac{\dot{Q}_{r,\theta}(t)}{Q_{r,\theta}(t)}-B(t)\right)^2},
\end{aligned}
$$

TÜBİTAK

$$(\Delta\hat{q}\Delta\hat{p})_{r,\theta}(t) = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 + \frac{(e^{\gamma t}Q^2_{r,\theta}(t))^2}{\omega_0^2}\left(\frac{\dot{Q}_{r,\theta}(t)}{Q_{r,\theta}(t)} - B(t)\right)^2}. \qquad (10.117)$$

Bu bölümde tanıtılan problem *"Dynamics of squeezed states of a generalized quantum parametric oscillator"*, **IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1194(2019) 012018,** adlı makalemizde daha ayrıntılı çalışıldı. Genelleştirilmiş Caldirola-Kanai osilatör için zamana bağlı sıkıştırılmış koherent durumlar elde edildi, tam çözülebilen modeller inşa edildi ve her bir model için durumların sıkıştırılmışlık özellikleri osilatörün paramametreleri cinsinden incelendi. En genel quadratik ve zamana bağlı Hamiltonyen için sıkıştırılmış durumlar *"Time-evolution of Squeezed Coherent States of a Generalized Quantum Parametric Oscillator"*, adlı makalemizde çalışıldı. Bu eser **J. Math. Phys. dergisinde yayına kabul edildi**.

10.5 Schrödinger'in parametrik Cat durumları

Cat durumları iki koherent durumun doğrusal kombinasyonu olarak düşünülebilir

$$|0,t\rangle_\alpha = N_0(\,|\alpha,t\rangle + |q^2\alpha,t\rangle\,)\,, \quad |1,t\rangle_\alpha = N_1(\,|\alpha,t\rangle + \bar{q}^{\,2}|q^2\alpha,t\rangle\,).$$

Ayrıca bu durumların π açısı kadar dönme ile ilişkileri vardır çünkü burada $q^4 = 1$ birim köküne karşılık gelen $q^2 = \bar{q}^{\,2} = -1$ olarak tanımlanır. Normalleştirme sabitleri eşittir:

$$N_0 = \frac{e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}}{2\sqrt{\cosh|\alpha|^2}}\,, \quad N_1 = \frac{e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}}{2\sqrt{\sinh|\alpha|^2}}\,.$$

Hadamard kapısı uygulanarak bu durumlar matris formunda yazılabilir

$$\begin{bmatrix} |0,t\rangle_\alpha \\ |1,t\rangle_\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{N}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \bar{q}^{\,2} \end{bmatrix}}_{Hadamard\ gate}\begin{bmatrix} |\alpha,t\rangle \\ |q^2\alpha,t\rangle \end{bmatrix}.$$

Burada normalleştirme matrisi

$$\mathbf{N} = \frac{e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{diag}\left({}_0e^{|\alpha|^2},\,{}_1e^{|\alpha|^2}\right)^{-1/2}(mod\,2) \equiv \mathrm{diag}\,(N_0,N_1)$$

çift ($0 \; mod \, 2$) ve tek ($1 \; mod \, 2$) için, üstel fonksiyonlar ile tanımlanır

$$
\begin{aligned}
(mod\,2) \quad {}_0e^{|\alpha|^2} &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{|\alpha|^2} + e^{q^2|\alpha|^2}}{2} = \cosh|\alpha|^2, \\
(mod\,2) \quad {}_1e^{|\alpha|^2} &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{|\alpha|^2} + \bar{q}^2 e^{q^2|\alpha|^2}}{2} = \sinh|\alpha|^2.
\end{aligned}
$$

10.5.1 Cat durumları için özdeger problemi

Keherent $\{|+\alpha, t\rangle, |-\alpha, t\rangle\}$ durumların her doğrusal kombinasyonu da $A^2(t)$ operatörünün α^2 öz değerine karşılık gelen özdurumudur. Bu da parametrik Schrödinger cat durumlarının $A^2(t)$ operatörün özdurumu olduğunu göstermektedir,

$$A(t)^2|0,t\rangle_\alpha = \alpha^2|0,t\rangle_\alpha, \quad A(t)^2|1,t\rangle_\alpha = \alpha^2|1,t\rangle_\alpha,$$

ve böylece $\{|0,t\rangle_\alpha, |1,t\rangle_\alpha\}$ durumlar orthonormal baz oluşturur.

Bu durumlar parametrik kübit koherent durumunu tanımlamak için kullanılabilir:

$$|\psi, t\rangle_\alpha = c_0|0,t\rangle_\alpha + c_1|1,t\rangle_\alpha,$$

where $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$, burada $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$. Kübit koherent durumlar da $A^2(t)$ operatörününün özdurumudur

$$A^2(t)|\psi,t\rangle_\alpha = \alpha^2|\psi,t\rangle_\alpha.$$

10.5.2 Cat durumlarının fermiyonik gösterimi

Dilatasyon operatörü $q^{2N(t)} = e^{i\pi N(t)} = (-1)^{A^+(t)A(t)}$, kedi durumları için eşlik (parity) operatörüdür, öyle ki $|0,t\rangle_\alpha$ and $|1,t\rangle_\alpha$ durumlar bu operatörün özdurumlarıdır, ve sırasıyla,q^2-periodik ve q^2-öz-benzeş şeklinde bulunur

$$q^{2N(t)}|0,t\rangle_\alpha = |0,t\rangle_\alpha\,, \quad q^{2N(t)}|1,t\rangle_\alpha = q^2|1,t\rangle_\alpha.$$

Cat durumları q^2-sayı operatörünün özdurumudur,

$$[N(t)]_{q^2} = \frac{q^{2N(t)} - 1}{q^2 - 1}.$$

Burada $q^2 = -1$ 'dir, ve özdeğerler de $[0]_{q^2} = 0$ ve $[1]_{q^2} = 1$ olarak bulunur.

10.6 Parametrik trinity durumlar

Şimdi, $q^6 = 1$'e karşılık gelen, $\frac{2\pi}{3}$ açı ile döndürülmüş koherent durumların kümesini ele alalım

$$\begin{aligned}
|0,t\rangle_\alpha &= e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{|\alpha,t\rangle + |q^{\,2}\alpha,t\rangle + |q^{\,4}\alpha,t\rangle}{\sqrt{3}\sqrt{e^{|\alpha|^2} + e^{q^2|\alpha|^2} + e^{q^4|\alpha|^2}}} = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{|\alpha,t\rangle + |q^{\,2}\alpha,t\rangle + |q^{\,4}\alpha,t\rangle}{3\sqrt{{}_0e^{|\alpha|^2}(mod\,3)}}\,, \\
|1,t\rangle_\alpha &= e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{|\alpha,t\rangle + \overline{q}^2|q^{\,2}\alpha,t\rangle + \overline{q}^4|q^{\,4}\alpha,t\rangle}{\sqrt{3}\sqrt{e^{|\alpha|^2} + \overline{q}^2e^{q^2|\alpha|^2} + \overline{q}^4e^{q^4|\alpha|^2}}} = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{|\alpha,t\rangle + \overline{q}^2|q^{\,2}\alpha,t\rangle + \overline{q}^4|q^{\,4}\alpha,t\rangle}{3\sqrt{{}_1e^{|\alpha|^2}(mod\,3)}}\,, \\
|2,t\rangle_\alpha &= e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{|\alpha,t\rangle + \overline{q}^4|q^{\,2}\alpha,t\rangle + \overline{q}^2|q^{\,4}\alpha,t\rangle}{\sqrt{3}\sqrt{e^{|\alpha|^2} + \overline{q}^4e^{q^2|\alpha|^2} + \overline{q}^2e^{q^4|\alpha|^2}}} = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{|\alpha,t\rangle + \overline{q}^4|q^{\,2}\alpha,t\rangle + \overline{q}^2|q^{\,4}\alpha,t\rangle}{3\sqrt{{}_2e^{|\alpha|^2}(mod\,3)}}\,.
\end{aligned}$$

Bu durumlar trinity-Hadamard kapısının uygulanmasıyla elde edilebilir,

$$\begin{bmatrix} |0,t\rangle_\alpha \\ |1,t\rangle_\alpha \\ |2,t\rangle_\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{N}\, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{q}^2 & (\overline{q}^2)^2 \\ 1 & \overline{q}^4 & (\overline{q}^4)^2 \end{bmatrix}}_{Trinity\ gate} \begin{bmatrix} |\alpha,t\rangle \\ |q^2\alpha,t\rangle \\ |q^4\alpha,t\rangle \end{bmatrix}\,,$$

ve normalleştirme sabitleri

$$\mathbf{N} = \frac{e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{3}}\,\mathrm{diag}\left({}_0e^{|\alpha|^2}, {}_1e^{|\alpha|^2}, {}_2e^{|\alpha|^2}\right)^{-1/2} (mod\ 3) \equiv \mathrm{diag}\,(N_0, N_1, N_2)$$

şeklinde hesaplanır,

$$1 + \overline{q}^{2(n-k)} + \overline{q}^{4(n-k)} = 3\,\delta_{n\equiv k(mod\ 3)} \quad , 0 \le k \le 2.$$

10.6.1 Trinity durumlar için özdeğer problemi

Trinity durumlar $\{|0,t\rangle_\alpha, |1,t\rangle_\alpha, |2,t\rangle_\alpha\}$ $A^3(t)$ operatörünün özdurumlarıdır.

$$A^3(t)|q^{2k}\alpha,t\rangle = \alpha^3|q^{2k}\alpha,t\rangle \quad \Rightarrow \quad A^3(t)|k,t\rangle_\alpha = \alpha^3|k,t\rangle_\alpha \quad k = 0,1,2.$$

Trinity durumlardan, $|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ olan, 3 tabanlı kuantum bilgi birimi olarak qutrit koherent durumlarını elde edebiliriz $|\psi,t\rangle_\alpha = c_0|0,t\rangle_\alpha + c_1|1,t\rangle_\alpha + c_2|2,t\rangle_\alpha$, where $|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Bu durumlar $A^3(t)$ operatörünün özdurumlarıdır

$$A^3(t)|\psi,t\rangle_\alpha = \alpha^3|\psi,t\rangle_\alpha.$$

Ayrıca, q^2 sayı operaörü $[N(t)]_{q^2} = \frac{q^{2N(t)}-1}{q^2-1}$ için, $N(t)|n,t\rangle = n|n,t\rangle, n \geq 0$ olduğundan, ve

$$q^{2N(t)}|0,t\rangle_\alpha = |0,t\rangle_\alpha, \quad q^{2N(t)}|1,t\rangle_\alpha = q^2|1,t\rangle_\alpha, \quad q^{2N(t)}|2,t\rangle_\alpha = q^4|2,t\rangle_\alpha\,,$$

nedeni ile, köşegen formda zamandan bağımsız matris elemanlarını elde ederiz
,

$${}_\alpha\langle 0,t|[N(t)]_{q^2}|0,t\rangle_\alpha = [0]_{q^2}, \quad {}_\alpha\langle 1,t|[N(t)]_{q^2}|1,t\rangle_\alpha = [1]_{q^2}, \quad {}_\alpha\langle 2,t|[N(t)]_{q^2}|2,t\rangle_\alpha = [2]_{q^2}\,.$$

10.7 Parametrik quartet durumlar

Şimdi, $\frac{\pi}{2}$ açısı ile döndürülmüş ve $q^8 = 1$ birim köküyle belirlenen dört durumu tanımlayalım

$$\begin{bmatrix} |0,t\rangle_\alpha \\ |1,t\rangle_\alpha \\ |2,t\rangle_\alpha \\ |3,t\rangle_\alpha \end{bmatrix} = \mathbf{N}\,\frac{1}{\sqrt{4}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{q}^2 & (\overline{q}^2)^2 & (\overline{q}^2)^3 \\ 1 & \overline{q}^4 & (\overline{q}^4)^2 & (\overline{q}^4)^3 \\ 1 & \overline{q}^6 & (\overline{q}^6)^2 & (\overline{q}^6)^3 \end{bmatrix}}_{Quartet\ gate} \begin{bmatrix} |\alpha,t\rangle \\ |q^2\alpha,t\rangle \\ |q^4\alpha,t\rangle \\ |q^6\alpha,t\rangle \end{bmatrix}.$$

Normalleştirme sabitleri)

$$\mathbf{N} = \frac{e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{4}}\,\mathrm{diag}\left({}_0e^{|\alpha|^2}, {}_1\,e^{|\alpha|^2}, {}_2\,e^{|\alpha|^2}, {}_3\,e^{|\alpha|^2}\right)^{-1/2}(mod\,4) \equiv \mathrm{diag}\,(N_0, N_1, N_2, N_3)$$

olarak bulunur ve aşağıdaki özdeşlik geçerlidir

$$1 + \overline{q}^{2(n-k)} + \overline{q}^{4(n-k)} + \overline{q}^{6(n-k)} = 4\,\delta_{n\equiv k(mod\,4)} \quad ,0 \leq k \leq 3.$$

Quartet (dörtlü) durumlar, $A^4(t)$ operatörünün α^4 özdeğerine karşılık gelen özdurumlarıdır

$$A^4(t)|q^{2k}\alpha,t\rangle = \alpha^4|q^{2k}\alpha,t\rangle \quad \Rightarrow \quad A^4(t)|k,t\rangle_\alpha = \alpha^4|k,t\rangle_\alpha \quad k = 0,1,2,3.$$

Ayrıca, bu durumlar q^2-sayı operatörünün $[N(t)]_{q^2}$ öz durumlarıdır

$$q^{2N(t)}|k,t\rangle_\alpha = q^{2k}|k,t\rangle_\alpha \quad \Rightarrow \quad [N(t)]_{q^2}|k,t\rangle_\alpha = [k]_{q^2}|k,t\rangle_\alpha\,,\text{where } k = 0,1,2,3.$$

Quartet durumlar cinsinden, kukuat(ququqad) kuantum durumlarını 4 tabanlı kuantum bilgi birimleri olarak tanımlayabiliriz.

10.8 Parametrik Kuantum Koherent Durumların Kaleidoskopu

Önceki bölümlerde ele alınan problemleri genelleştirmek için $\frac{\pi}{n}$ açısı ile döndürme ve n-kenarlı düzgün çokgenin köşegenlerine ait n tane koherent durumun doğrusal kombinasyonunu ele alacağız. Bu durumlar, $q^{2n} = 1$ denklemin kökleriyle ilişkilidir.

10.8.1 Kuantum Fourier Dönüşümü

Kaleidoskop orthogonal durumları kuantum Fourier dönüşümü ile tanımlanabilir

$$\begin{bmatrix} |\widetilde{0}, t\rangle_\alpha \\ |\widetilde{1}, t\rangle_\alpha \\ |\widetilde{2}, t\rangle_\alpha \\ |\widetilde{3}, t\rangle_\alpha \\ \vdots \\ |\widetilde{n-1}, t\rangle_\alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(n-1)} \\ 1 & w^3 & w^6 & \dots & w^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{(n-1)} & w^{2(n-1)} & \dots & w^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\alpha, t\rangle \\ |q^2\alpha, t\rangle \\ |q^4\alpha, t\rangle \\ |q^6\alpha, t\rangle \\ \vdots \\ |q^{2(n-1)}\alpha, t\rangle \end{bmatrix} . \tag{10.118}$$

Burada $w = e^{\frac{-2\pi i}{n}} = \bar{q}^2$ n dereceden birimin köküdür, ve karşılık gelen üniter matris $QQ^\dagger = Q^\dagger Q = I$ aşağıdaki ilişkiyi sağlamaktadır

$$\boxed{|\widetilde{k}, t\rangle_\alpha \longmapsto \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} w^{jk} |q^{2j}\alpha, t\rangle \quad 0 \leq k \leq n-1}.$$

Ortonormal durumlar için, normalleştirme matrisi

$$\mathbf{N} = \frac{e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{n}} \operatorname{diag}\left({}_0 e^{|\alpha|^2}, {}_1 e^{|\alpha|^2}, {}_2 e^{|\alpha|^2}, \dots, {}_{n-1} e^{|\alpha|^2}\right)^{-1/2} (mod\, n)$$

$(mod\ n)$ üstel fonksiyonlar cinsinden tanımlanır.

$$f_s(|\alpha|^2) = {}_s\, e^{|\alpha|^2} (mod\, n) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^{nk+s}}{(nk+s)!} , \quad 0 \leq s \leq n-1 . \tag{10.119}$$

Bu fonksiyonlar , standart üstel fonksiyonların kombinasyonunu olarak gösterilebilir

$$_{s}e^{|\alpha|^2}(mod\, n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\overline{q}^{2sk}e^{q^{2k}|\alpha|^2} \ , \quad 0 \leq s \leq n-1\,.$$

10.9 Kuantum Cebiri

Kaleydoskop koherent durumlar $q^{2N(t)}$ operatörünün özdurumlarıdır:

$$q^{2N(t)}|k,t\rangle_{\alpha} = q^{2k}|k,t\rangle_{\alpha}, \ \ k = 0, 1..., n-1.$$

Bu operatör, Fock uzayında sonsuz matris formundadır

$$\Sigma_3 \equiv q^{2N(t)} = I\otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & q^4 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & q^{2(n-1)} \end{pmatrix}, \ \Sigma_1 = I\otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.120}$$

Buradaki $n \times n$ matrisler, sırasıyla Sylvester saat ve öteleme matrisleridir. Matrisler q değişmelidir, $\Sigma_1\Sigma_3 = q^2\Sigma_3\Sigma_1$, $\Sigma_1^n = I$, $\Sigma_3^n = I$ bağıntılarını sağlarlar ve üniter dönüşüm ile bağlantılıdırlar $\Sigma_1 = (I \otimes Q)q^{2\hat{N}}(I \otimes Q^+)$.

Dilatasyon operatörü ile simetrik olmayan q analiz $[N(t)]_{q^2} = (q^{2N(t)} - 1)/(q^2-1)$ ve simetrik olan $[N(t)]_{\tilde{q}^2} = (q^{2N(t)} - q^{-2N(t)})/(q^2-q^{-2})$ için q^2-sayı operatörünü tanımladık. Kaleydoskop biriminde, sayı operatörü köşegeneldir ve zamandan bağımsız q sayıları : $[N(t)] = diag([0], [1], ..., [n-1])$ ile verilir. Simetrik durum için, q-sayı operatörü hermisyendir ve $[N(t)] = B^+(t)B(t)$, $[N(t) + I] = B(t)B^+(t)$ olarak çarpanlarına ayrılabilir. $[N(t)] = B^+(t)B(t)$, $[N(t) + I] = B(t)B^+(t)$. Burada

$$B(t) = A(t)\sqrt{\frac{[N(t)]_{\tilde{q}^2}}{N(t)}}$$

açık olarak yazılabilir

$$\hat{B} = I \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{[1]} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{[2]} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}^{+} = I \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \sqrt{[1]} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt{[2]} & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \tag{10.121}$$

ve $\hat{B}^n = 0$, $(\hat{B}^{+})^n = 0$. Simetrik olmayan durumda, sayı operatörü Hermityen değildir.

10.9.1 Simetrik durum

Simetrik durum için, kuantum cebiri

$$B(t)B^{+}(t) - q^2 B^{+}(t)B(t) = q^{-2N(t)}$$
$$B(t)B^{+}(t) - q^{-2} B^{+}(t)B(t) = q^{2N(t)}$$

ve kuantum q^2-osilatörü için Hamiltonyen

$$H(t) = \frac{\hbar\omega}{2} \left([N(t)]_{\tilde{q}^2} + [N(t) + I]_{\tilde{q}^2}\right).$$

Hamiltonyen için kaleidoskop durumlarına karşılık gelen spektrum

$$E_k = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}(k + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

şeklinde olur.

Koherent durumların oluşturduğu kaleydoskobu, ışığın (Gaussian durumlar) koherent durumlarının uygun faz birleştirimi olarak tanımlabilir ve bu sadece ikili değil aynı zamanda rastgele $n-$sayı tabanına karşılık gelen kuantum bilgi birimini sağlıyabilir. Bu durumlar, kuantum $q-$osilatörü ile ilişkili kuantum simetrisinin temsilini sunar.

10.10 Qubitlerin Apollonius gösterimi

Birim kürenin güney kutbundan kompleks düzleme stereografik izdüşüm, koherent kübit durumların temsilini verir

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|1\rangle \quad \Rightarrow \quad |z\rangle = \frac{|0\rangle + z|1\rangle}{\sqrt{1+|z|^2}}. \tag{10.122}$$

Bu durumda p_0 ve p_1 olasılıklarının oranı r yarıçaplı eş merkezli çemberler üzerinde sabittir ve bu rastgelelik seviyesi ile ilişkilidir. Ayrıca, (10.122)' teki $|z\rangle$ durumuna Hadamard kapısını uygularsak Apollonius simetrik durumunu verir

$$H|z\rangle = \frac{(z-1)|0\rangle + (z+1)|1\rangle}{\sqrt{|z-1|^2 + |z+1|^2}}.$$

Kompleks düzlemde hesaplama tabanı durumları $|0\rangle$ ve $|1\rangle$, sırasıyla $z = -1$ ve $z = 1$ noktalarında bulunurlar. Bu noktalar, düzlemde rastgele noktalara dönüştürülebilir. Ayrıca, 0 ve 1 tamsayıları klasik bit ile daha yakın benzerlik kurmak için, başka bir temsil kullanabiliriz. Burada, $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarını, ölçekleme ve öteleme ile $z \to 2z - 1$, z$=$ 0 ve $z = 1$ değerlerine yerleştiririz,) simetrik olmayan Apollonius kübiti elde ederiz

$$|a\rangle = \frac{(z-1)|0\rangle + z|1\rangle}{\sqrt{|z-1|^2 + |z|^2}}.$$

$|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarını ölçmek için rastgelelik seviyesi olarak olasılıklarının oranı, çemberlerin Apollonius tanımı ile kesişen düzlemdeki uzaklıklarının oranına eşittir

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{|z|^2}{|z-1|^2} \equiv r^2,$$

öyle ki çemberler için bu durumlar ortak simetrik durumlar olur. Apollonius kübit durumları için , Shannon entropi tamamiyle r cinsinden belirlenir ve çemberler üzerindeki durumlar için sabittir $S(r^2) = \log_2(1+r^2) - \frac{r^2}{1+r^2}\log_2 r^2$.

Bölüm 11

Bulgular ve Tartışmalar VI: Girdap hareketi için f kuantizasyonu

11.1 Halka biçimli bölgede f-osilatör olarak girdap

f-osilatör olarak halka biçimli bölgelerde girdap. Yukarıdaki formüllerin bir uygulaması olarak, burada halka biçimli bölgelerdeki nokta girdap problemini doğrusal olmayan bir osilatör ya da f-osilatörünün özel durumu olarak değerlendiriyoruz.

11.1.1 q-osilatör olarak daire halkasında girdap rotasyonu

Halka biçimli bölgelerde, bir nokta girdap için girdap pozisyonundaki karmaşık hız

$$\dot{z}_0 = \dot{x}_0 + i\dot{y}_0 = V_0(\bar{z})|_{z=z_0} \tag{11.1}$$

tarafından belirlenmekte ve karmaşık hız

$$\begin{aligned}\bar{V}_0(z) &= \frac{i\kappa}{z(q-1)}\left[Ln_q\left(1-\frac{z}{z_0}\right)-Ln_q\left(1-\frac{z_0}{z}\right)+Ln_q\left(1-\frac{r_2^2}{z\bar{z}_0}\right)-Ln_q\left(1-\frac{z\bar{z}_0}{r_1^2}\right)\right]\\ &= \sum_{n=\pm1}^{\pm\infty}\frac{i\kappa}{z-z_0q^n}-\sum_{n=\pm1}^{\pm\infty}\frac{i\kappa}{z-\frac{r_1^2}{\bar{z}_0}q^n},\end{aligned}$$

$q = r_2^2/r_1^2$'dir. İyi bilinen Hidrodinamik Helmholtz prosedürüne göre,girdabın kendi kendine etkileşimini önlemek için, girdabın kendisine olan katkısı dışlanır. Eğer q-harmonic serilerin

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[n]} = -Ln_q 0 \tag{11.2}$$

$q > 1$ için yakınsadığını dikkate alırsak, $z = z_0$'da ilk iki terim birbirini iptal eder ve aşağıdaki hareket denklemini elde ederiz

$$\dot{z}_0 = \frac{i\kappa}{\bar{z}_0(q-1)}\left[Ln_q\left(1-\frac{|z_0|^2}{r_1^2}\right)-Ln_q\left(1-\frac{r_2^2}{|z_0|^2}\right)\right]. \tag{11.3}$$

Burada sonsuz toplamların manipülasyonlarını, q-logaritma fonksiyonları

$$Ln_q(1-x) \equiv -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{[n]},\ \ |x| < q,\ \ q > 1, \tag{11.4}$$

her n tam sayısı için q-sayılarının

$$[n] \equiv 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{11.5}$$

şekilde tanıtarak önleriz. (11.3) denklemi

$$\dot{z}_0 = -i\omega z_0 \tag{11.6}$$

genliğe (ve enerjiye) bağlı frekans

$$\omega(|z_0|^2) = \frac{\Gamma}{2\pi(q-1)|z_0|^2}\left[Ln_q\left(1-\frac{|z_0|^2}{r_1^2}\right)-Ln_q\left(1-\frac{r_2^2}{|z_0|^2}\right)\right] \tag{11.7}$$

TÜBİTAK

ile doğrusal olmayan osilatördür. Enerjiye ek olarak,açısal momentum $L = \Gamma \bar{z}_0 z_0$, bu problemde korunan bir başka miktartır.Hamiltonyen formunda

$$\Gamma \dot{z}_0 = -2i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_0}, \tag{11.8}$$

denklemini, kanonik braket

$$\{z_0, \bar{z}_0\} = -\frac{2i}{\Gamma}, \tag{11.9}$$

ve Hamiltonyen fonksiyon

$$H(z_0, \bar{z}_0) = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln \left| e_q \left(\frac{|z_0|^2}{(1-q) r_1^2} \right) e_q \left(\frac{r_2^2}{(1-q)|z_0|^2} \right) \right|, \tag{11.10}$$

ile, Jackson q-üstel fonksiyonunun aşağıdaki gibi tanımlanmasıyla, elde ederiz

$$e_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n]!}. \tag{11.11}$$

Bu, eğer $|q| > 1$ ise z'de tüm uzayda analytic fonksiyondur ve sonsuz çarpma gösterimini getirerek,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^k} \right) = \frac{1}{1-z} e_q \left(\frac{-z}{1-q^{-1}} \right), \tag{11.12}$$

bu fonksiyonun sıfırlarının, q oranında geometrik olarak sıralandığını gösterir. Eylem-açı değişkenlerini (J, θ))

$$z_0 = i\sqrt{J} e^{-i\theta}, \quad \bar{z}_0 = -i\sqrt{J} e^{i\theta}, \tag{11.13}$$

kanonikal parantez

$$\{\theta, J\} = \frac{2}{\Gamma} \tag{11.14}$$

ile birlikte tanıtarak, Hamiltonyen fonksiyonunu eylem değişkeni sadece J olarak

$$H(J) = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln \left| e_q \left(\frac{J}{(1-q) r_1^2} \right) e_q \left(\frac{r_2^2}{(1-q) J} \right) \right| \tag{11.15}$$

ve dönme frekansının aşağıdaki gibi elde ederiz

$$\omega(J) = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = \frac{\Gamma}{2\pi(q-1)J} \left[Ln_q \left(1 - \frac{J}{r_1^2} \right) - Ln_q \left(1 - \frac{r_2^2}{J} \right) \right]. \tag{11.16}$$

O zaman açısal momentum sadece $L = \Gamma J$ olur. Modelimizi f- osilatör olarak göstermek için karmaşık fonksiyonlar tanıtıyoruz

$$z_f = \sqrt{\frac{H(z_0, \bar{z}_0)}{z_0 \bar{z}_0}} z_0, \quad \bar{z}_f = \sqrt{\frac{H(z_0, \bar{z}_0)}{z_0 \bar{z}_0}} \bar{z}_0. \tag{11.17}$$

Bu durumda, basit f- osilatörünü

$$H(z_f, \bar{z}_f) = z_f \bar{z}_f, \tag{11.18}$$

Poisson parantezi

$$\{z_f, \bar{z}_f\} = -\frac{2i}{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial J}(z_f, \bar{z}_f) = -\frac{2i}{\Gamma} \omega(z_f, \bar{z}_f) \tag{11.19}$$

ile birlikte elde ederiz ve aşağıdaki frekans (11.16)'la evrimleşir

$$\dot{z}_f = -i\omega z_f. \tag{11.20}$$

Girdap hareketinin F-osilatör kuantizasyonu

Girdap hareketi için F-osilatör kuantizasyonu yarı klasik yaklaşımda, kuantizasyon $J \to n + 1/2$'nin değiştirilmesinin Bohr-Zommerfeld kuantizasyon kuralı ile gerçekleşir. Daha sonra enerji spektrumu

$$E_n = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln \left| e_q \left(\frac{(n + \frac{1}{2})}{(1-q) r_1^2} \right) e_q \left(\frac{r_2^2}{(1-q)(n + \frac{1}{2})} \right) \right| \tag{11.21}$$

şeklinde olur. Bu sistemin f-osilatör kuantizasyonu, z_0 olan karmaşık değerleri, bozonik operatörler $[a, a^+] = 1$, $N = a^+ a$ ile değiştirir. 11.15) $H(N)$, by replacing $J \to N$, and spectrum of the system is ((2.1)'deki operatörleri, $J \to N$ değişimi yapılarak, doğrusal olmayan fonksiyon (11.15) $H(N)$ cinsinden tanımlarken, f-osilatörüne karşılık gelen Hamiltonyen(7.4) ile verilir ve sistemin spektrumu bulunur

$$E_n = \frac{1}{2}[H(n) + H(n+1)]. \tag{11.22}$$

Benzer yolla, N-nokta girdap polinom rotasyonu doğrusal olmayan ya da f-osilatörü olarak halka biçimli bölgelerde çalışılabilir.

11.2 Doğrusal olmayan osilatör olarak N-girdap poligonu

İki çember teoreminden dolayı, N-nokta girdapları için hareket denklemlerini elde etmek kolaydır [34]. Eşit güçteki girdaplar, halka biçimli bölgelerdeki düzgün çokgenlerin köşelerinde konumlanırsa, problem aşağıdaki düzenli rotaston frekansıyla, tam çözümleri $z_k(t) = r\exp(i\omega t + i2\pi k/N)$, $k = 1, ..., N$ getirir

$$\omega(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}\frac{N-1}{2}+\frac{\Gamma}{2\pi r^2}\frac{1}{q-1}\sum_{j=1}^{N}\left[Ln_q\left(1-\frac{r_2^2}{r^2}e^{i\frac{2\pi}{N}j}\right)-Ln_q\left(1-\frac{r^2}{r_1^2}e^{i\frac{2\pi}{N}j}\right)\right] \tag{11.23}$$

Eğer $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{N}}$'nın birimin ilkel kökü olduğuna dikkat edilirse, bu formüldeki toplama açık bir şekide yapılabilir ve $\zeta^N = 1$, $\zeta^N - 1 = (\zeta-1)(1+\zeta+\zeta^2+ ... +\zeta^{N-1}) = 0$ eşitliğini gösterir. Daha sonra $1+\zeta+\zeta^2+...+\zeta^{N-1} = 0$ ve q-logaritma fonksiyonlarının toplamı için aşağıdaki denklemi elde ederiz

$$\sum_{n=1}^{N} Ln_q(1-x\zeta^n) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{[k]_q}(1+\zeta^k+\zeta^{2k}+...+\zeta^{k(N-1)}). \tag{11.24}$$

Eğer $l = 1, 2, ...$ olduğunda $k = Nl$ ve $k \neq Nl$ için yok olursa, toplam $1+\zeta^k+\zeta^{2k}+...+\zeta^{k(N-1)} = N$ olur. Eğer $k \neq Nl$ için ζ^2, ζ^3,...ζ^{N-1} ilkel kökler ve $(\zeta^k)^N - 1 = (\zeta^k-1)(1+\zeta^k+\zeta^{2k}+...+\zeta^{(N-1)k}) = 0$ olduğu dikkat edilirse, bu kolayca anlaşılabilir. Böylece (11.24)'deki yok olmayan terimler

$$\sum_{n=1}^{N} Ln_q(1-x\zeta^n) = -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{x^{Nl}}{[Nl]_q}N = -N(q-1)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{x^{Nl}}{q^{Nl}-1} \tag{11.25}$$

$$= -N(q-1)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(q^N-1)x^{Nl}}{(q^{Nl}-1)(q^N-1)} \tag{11.26}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{N} Ln_q(1-x\zeta^n) = -\frac{N}{[N]_q}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(x^N)^l}{[l]_{q^N}} = \frac{N}{[N]_q}Ln_{q^N}(1-x^N). \tag{11.27}$$

(11.27) formülünü uygulayarak, en sonunda frekans (11.23)'ı basit bir formda yeniden yazarız

$$\omega(r) = \frac{\Gamma(N-1)}{4\pi r^2} + \frac{\Gamma N}{2\pi r^2(q^N-1)}\left[Ln_{q^N}\left(1-\frac{r_2^{2N}}{r^{2N}}\right) - Ln_{q^N}\left(1-\frac{r^{2N}}{r_1^{2N}}\right)\right]. \tag{11.28}$$

Sonuç gösteriyor ki frekans $\omega(r)$, r'nin fonksiyonudur ve düzgün şekilde dönen girdap çokgeni doğrusal olmayan osilatörü temsil eder. Bu çokgenin doğrusal olmayan osilatör olarak kuantizasyonu, bir nokta girdap halinde olduğu gibi benzer bir yolla yapılabilir [33].

TÜBİTAK

Bölüm 12

Bulgular ve Tartışmalar VII: Simetrik ve Fibonacci q-analitik durumlar

12.1 q-analitik fonksiyonlar

Bu bölümde q-analitik fonksiyonların çeşitli türlerini tanıtıyoruz. Bu fonksiyonlar q-binomları tarafından belirlenir ve q-analitik Fock-Bargman gösteriminde kuantum durumlarını temsil eder. q- binomlarının kendisi $|n>$ durumlarına karşılık gelir ve genelleştirilmiş analitik fonksiyonlardır.

12.1.1 Simetrik olmayan q-analitik fonksiyonları

Herhangi bir gerçel analitik fonksiyondan q-öteleme ile

$$e_{1/q}^{iyD_q^x} x^n = (x+iy)_q^n$$

q-analitik fonksiyonunu

$$f(x+iy)_q = e_{1/q}^{iyD_q^x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+iy)_q^n,$$

satisfying $\bar{\partial}_q$ equation, $(D_q^x + iD_{1/q}^y) f(x+iy)_q = 0$, $\bar{\partial}_q$ denklemini, $(D_q^x + iD_{1/q}^y) f(x+iy)_q = 0$ sağlayacak şekilde elde ederiz. Bu fonksiyonun gerçek kısmı $u(x,y) = \cos_{1/q}(yD_q^x)f(x)$ ve karmaşık kısmı $v(x,y) = \sin_{1/q}(yD_q^x)f(x)$ q-harmonik olur ve q-Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar:

$$D_q^x u(x,y) = D_{1/q}^y v(x,y), \quad D_{1/q}^y u(x,y) = -D_q^x v(x,y).$$

12.1.2 Simetrik q-analitik fonksiyonlar

Simetrik q-binomları için q-öteleme

$$e_{\tilde{q}}^{iyD_{\tilde{q}}^x} x^n = (x+iy)_{\tilde{q}}^n,$$

olarak bildiğimiz denklem, simetrik q-analitik fonksiyonunu

$$f(x+iy)_{\tilde{q}} = e_{\tilde{q}}^{iyD_{\tilde{q}}^x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+iy)_{\tilde{q}}^n,$$

belirler ve $\bar{\partial}_{\tilde{q}}$ denklemini sağlar.

$$\frac{1}{2}(D_{\tilde{q}}^x + iD_{\tilde{q}}^y) f(x+iy)_{\tilde{q}} = 0.$$

Örnek olarak

$$e(z;\tilde{q}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)_{\tilde{q}}^n}{[n]_{\tilde{q}}!}$$

tam simetrik q-analitik fonksiyondur. Fonksiyonun gerçek kısmı $u(x,y) = \cos_{\tilde{q}}(yD_{\tilde{q}}^x)f(x)$ ve karmaşık kısmı $v(x,y) = \sin_{\tilde{q}}(yD_{\tilde{q}}^x)f(x)$, q-Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarlar

$$D_{\tilde{q}}^x u(x,y) = D_{\tilde{q}}^y v(x,y), \quad D_{\tilde{q}}^y u(x,y) = -D_{\tilde{q}}^x v(x,y),$$

ve q-harmoniktirler $(D_{\tilde{q}}^x)^2 u(x,y) + (D_{\tilde{q}}^y)^2 u(x,y) = 0$.

12.1.3 pq-analitik fonksiyon

$pq-$kalkülüs için binomların

$$e_{\frac{1}{p}\frac{1}{q}}^{iyD_{pq}^x} x^n = (x+iy)_{pq}^n,$$

olduğunu biliyoruz, ve burada

$$(x+iy)^n_{pq} = (x+ip^{n-1}y)(x+ip^{n-2}qy)...(x+ipq^{n-2}y)(x+iq^{n-1}y) \quad (12.1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]_{pq} (pq)^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{n-k} i^k y^k \quad (12.2)$$

$$e_{pq}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{pq}!}.$$

Daha sonra pq-öteleme

$$f(x+iy)_{pq} = e_{\frac{1}{p}\frac{1}{q}}^{iyD^x_{pq}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+iy)^n_{pq},$$

tarafından pq-analitik fonksiyonu üretilip, $\bar{\partial}_{pq}$ denklemini sağlar

$$\frac{1}{2}(D^x_{pq} + iD^y_{\frac{1}{p}\frac{1}{q}}) f(x+iy)_{pq} = 0.$$

Ayrıca, $u(x,y) = \cos_{\frac{1}{p}\frac{1}{q}}(yD^x_{pq})f(x)$ ve $v(x,y) = \sin_{\frac{1}{p}\frac{1}{q}}(yD^x_{pq})f(x))$ için pq-Cauchy-Riemann denklemlerini

$$D^x_{pq} u(x,y) = D^y_{\frac{1}{p}\frac{1}{q}} v(x,y), \quad D^y_{\frac{1}{p}\frac{1}{q}} u(x,y) = -D^x_{pq} v(x,y)$$

ve pq-Laplace denklemini

$$(D^x_{pq})^2 u(x,y) + (D^y_{\frac{1}{p}\frac{1}{q}})^2 u(x,y) = 0$$

elde ederiz.

12.1.4 Altın analitik fonksiyon

Karmaşık altın binomlar

$$(x+iy)^n_F = (x+i\varphi^{n-1}y)(x-i\varphi^{n-3}y)...(x+i(-1)^{n-1}\varphi^{1-n}y) = \quad (12.3)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]_F (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{n-k} i^k y^k, \quad (12.4)$$

şeklinde tanımlanır ve altın öteleme

$$E_F^{iyD_F^x} x^n = (x+iy)_F^n,$$

tarafından üretilirken aşağıdaki eşitlik sağlanır

$$E_F^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{F_n!}.$$

Böylece, altın analitik fonksiyonu bulunur

$$f(z,F) = E_F^{iyD_F^x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x+iy)_F^n}{F_n!}.$$

Bu fonksiyon altın $\bar{\partial}_F$ denklemini $\frac{1}{2}(D_F^x + iD_{-F}^y)f(z;F) = 0$, sağlar, $D_{-F} = (-1)^{x\frac{d}{dx}} D_F$. Ayrıca $u(x,y) = Cos_F(yD_F^x)f(x)$ ve $v(x,y) = Sin_F(yD_F^x)f(x)$ için altın Cauchy-Riemann denklemleri

$$D_F^x u(x,y) = D_{-F}^y v(x,y), \quad D_{-F}^y u(x,y) = -D_F^x v(x,y),$$

olup, altın-Laplace denklemi $(D_F^x)^2 u(x,y) + (D_{-F}^y)^2 u(x,y) = 0$ şeklindedir.

12.1.5 Altın koherent durumlar

Altın koherent durumlarını öz durumlar olarak tanımlıyoruz

$$b\,|\beta>_F = \beta\,|\beta>_F\,. \tag{12.5}$$

Bu durumları Fock uzayında $|\beta> = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n>$ genişleterek

$$c_{n+1}\sqrt{F_{n+1}} = c_n\,\beta, \tag{12.6}$$

olan ve aşağıdaki eşitliğini veren yineleme ilişkisini buluruz

$$c_n = \frac{\beta^n}{\sqrt{F_n!}}\,c_0. \tag{12.7}$$

Normalizasyon sabiti $<\beta|\beta> = 1$ ile c_0'ı sabitleyerek

$$|c_0|^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta|^{2n}}{F_n!}\right)^{-1} = \left(e_F^{|\beta|^2}\right)^{-1}, \tag{12.8}$$

z'nin tam fonksiyonu olduğunu kolayca gördüğümüz Fibonacci üstel fonksiyonu olan

$$e_F^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{F_n!}, \tag{12.9}$$

denklemi tanıttık. Sonuç olarak normalize koherent durumu

$$|\beta >_F = \left(e_F^{|\beta|^2}\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{F_n!}} |n >_F, \tag{12.10}$$

skaler çarpım ile elde ederiz

$$_F < \alpha|\beta >_F = \frac{e_F^{\bar{\alpha}\beta}}{\left(e_F^{|\alpha|^2}\right)^{1/2} \left(e_F^{|\beta|^2}\right)^{1/2}}. \tag{12.11}$$

12.1.6 Altın Fock-Bargman gösterimi

Fock uzayı $|\psi >= \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n >_F$ içinden keyfi bir durum için izdüşüm

$$< \beta|\psi > = \left(e_F^{|\beta|^2}\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\bar{\beta}^n}{\sqrt{F_n!}} \tag{12.12}$$

ile analitik dalga fonksiyonunu

$$\psi(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\beta^n}{\sqrt{F_n!}} \tag{12.13}$$

altın Fock-Bargman gösteriminde buluruz. Basit hesaplama ile kolayca görülebilir ki b ve b^+ operatörlerinin bu gösterimde

$$b \to D_\beta^F, \quad b^+ \to \beta, \tag{12.14}$$

tarafından verilip,burada Binet-Fibonacci karmaşık türevini aşağıdaki gibi tanımlarız

$$D_z^F \psi(z) = \frac{\psi(\varphi z) - \psi(\varphi' z)}{(\varphi - \varphi')z} = \frac{\psi(\varphi z) - \psi(-\varphi^{-1} z)}{(\varphi + \varphi^{-1})z}. \tag{12.15}$$

Bu türevin tek terimli üzerindeki etkisi tam olarak Fibonacci sayılarını $D_z^F z^n = F_n z^{n-1}$ verir ve Fibonacci üstel fonksiyonu için $D_z^F e_F^z = e_F^z$. Daha sonra Fibonacci sayı operatörü aşağıdaki gibi gösterilir

$$F_N \to \beta D_\beta^F. \tag{12.16}$$

Eğer bir analitik fonksiyon olan $\psi(z)$ değişmez ölçekli ise $\psi_k(\lambda z) = \lambda^k \psi_k(z)$, sonra

$$D_z^F \psi_k(z) = \frac{\psi_k(\varphi z) - \psi_k(-\varphi^{-1} z)}{(\varphi + \varphi^{-1})z} = \frac{(\varphi)^k - (-\varphi^{-1})^k}{(\varphi + \varphi^{-1})z} \psi_k(z) \tag{12.17}$$

denklemini ya da aşağıdaki denklemi sağlar

$$z D_z^F \psi_k(z) = F_k \, \psi_k(z). \tag{12.18}$$

Bu öz durum problemi sadece Fibonacci operatörü öz durum probleminin (**??**), öz durum fonksiyonlarının

$$\psi_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{F_k!}} \tag{12.19}$$

değişmez ölçekli olduğu, altın Fock-Bargman gösterimidir. Ancak (12.18)'in genel çözümüne bakılırsa,

$$f_k(z) = z^k A(z) \tag{12.20}$$

formunda olup, burada $A(z)$ keyfi bir altın-periyodik analitik fonksiyondur, i.e., $A(\varphi z) = A(-\varphi^{-1} z)$. Böyle bir yapı, kuantum fraktallarını [45],[30] karakterize eder ve ek çalışmalar gerektirir.

Bölüm 13

Sonuçlar

13.1 Bilimsel Sonuçlar

İntegrallenebilen sistemler ve doğrusal olmayan osilatörler

1. Çok boyutlu integrallenebilen sistemlerin gösterimini, eylem-açı değişkenler cinsinden, genliğe bağlı frekansa sahip q-ve f-tipi doğrusal olmayan osilatörler şeklinde bulduk. Özellikle, simetrik, simetrik olmayan, Fibonacci ve altın durumlarını çalıştık.

2. Integrallenebilen sistemleri doğrusal olmayan osilatörler olarak gösterdik. Sonlu boyutlu integrallenebilen sistemlerin, çok boyutlu doğrusal olmayan osilatörler olarak temsilini elde etmek için eylem-açı değişkenlerine kanonik dönüşümler uyguladık ve onları q ve f-osilatör olarak formüle etmek için kanonik olmayan dönüşüm kullandık.

Kuantizasyon ve kuantum grup simetrisi

1. Çok boyutlu kuantum integrallenebilir sistemler için enerji spektrumunu, özdurumlarını, koherent durumlarını ve zamana bağlı evrimi çalışıldı.

2. q ve f-osilatörlerin kanonik kuantizasyonu bulundu ve kuantum simetriye karşılık gelen kuantum cebiri belirlendi.

3. q ve f-osilatörlerin kanonik kuantizasyonu yapıldı ve onların kuantum simetrilerini veren kuantum cebiri bulundu. Enerji spektrumu ve özfonksiyonları q-hesaplama yöntemleriyle bulundu.

Genel f-doğrusal Schrödinger denklemi

1. q- osilatör dispersiyonu da dahil, keyfi f-dispersiyona sahip doğrusal serbest ve osilatör Schrödinger denklemleri çözüldü. Çözüm ile ilgili özel fonksiyonların genellemesi araştırıldı.

2. Genel f-lineer Schrödinger denklemleri tanıtıldı ve çözümleri bulundu.

3. q-simetrik, simetrik olmayan, Fibonacci ve altın dispersiyonlu lineer Schrödinger denklemleri tanıtıldı. Hareket eden dalgalar, genelleştirilmiş Kampe de Feriet polinomlar ve periyodik formdaki çözümler incelendi.

SO(2,1) AKNS, NLS ve KN hiyerarşisi f ve q resonant denklemleri

1. Kuantum simetri, göreli ve q- ve f-dispersiyona sahip doğrusal olmayan evrim denklemleri inşa edildi. Bunun için NLS, AKNS, DNLS ve KN hiyerarşilerinin yineleme operatörlerini uyguladık. Soliton, periyodik dalga ve özellikle rezonant soliton gibi çözümleri elde ettik.

2. SO(2,1) AKNS, KN, DNLS hiyerarşisinin q- ve f- integrallenebilen göreli resonant denklemlerini oluşturduk.

Kuantum parametrik osilatörün çözümleri ve kuantum dinamik simetrisi

1. Schrödinger gösteriminde, değişken parametreli durağan olmayan quantum osilatör problemi çözüldü. Bunun için dinamik simetri ve evrim operatörü yöntemleri kullanıldı.

2. Dalga fonksiyonlar, koherent durumlar, sıkıştırılmış koherent durumlar bulundu, ve davranışları zamana bağlı parametrelere bağlı olarak incelendi.

3. Keyfi doğrusal olmayan dispersiyona sahip değişken parametreli Schrödinger osilatör denklemleri tanıtıldı. Bu modellerin kuantum dinamik simetrisi belirlendi, çözümleri ve koherent durumları elde edildi.

f kuantizasyon ve girdap hareketi

1. Bir nokta girdap, iki nokta girdap ve N- nokta girdap çokgeni gibi çözümlerin halka biçimli bölgelerinde, f-osilatörün kuantizasyonunu bizim yöntemlerle elde edildi.

2. f-osilatör yöntemi ile girdap hareketlerinin kuantizasyonu yapıldı.

3. İki çember teoremini uygulayarak, kama ve halka biçimli sınırlı bölgelerde tanımlı girdap ve kaynak konfigurasyonları bulundu. q-özel fonksiyonlar cinsinden çözümleri bulundu ve analiz edildi.

Simetrik ve Fibonacci q-analitik durumlar

1. Simetrik olmayan q-analitik durumların kavramı, simetrik q-analitik durumlara, Fibonacci-analitik durumlara ve altın-analitik durumlara genişletildi. Bu türden analitik özelliklere sahip koherent durumları ve kuantum durumları için Fock-Bargman temsili bulundu. Dolaşıklık özelliğine sahip çoklu koherent durumlar ve yeni kuantum simetriler inşa edildi.

13.2 Öneriler, Uygulama alanları ve Açık problemler

Projemizin konusu yazarlar tarafından bulunan birçok temel sonuçlara dayanmaktadır. Yineleme operatörü ile integrallenebilen q-dispersiyon ve f-dispersiyon soliton denklemlerinin inşa yöntemi, relativistik Landau problemi ve relativistik Schrödinger denklemi ile ilgili Pashaev'in, (Pashaev, 2009, 2015) çalışmalarını takip eder. Bu yöntem, AKNS (1974) ve KN gibi integrallenebilen hiyerarşilerin yineleme operatörü ile ilgili literatüre katkıda bulunacaktır. Rezonant solitonlar $1+1$ boyutta ilk önce Pashaev ve Lee (2002)'de tanıtılmıştır (Pashaev ve Lee, 2002). Bunların, (Lee vd., 2007) tarafından gösterildiği gibi plazma fiziğinde uygulamaları vardır. Sonlu boyutlu integrallenebilen modellere, q-dispersiyona ve f-dispersiyona sahip osilatör olarak yaklaşımımız, kuantum dinamik simetriye sahip ve gerçek fiziksel olayları modelleyen q-osilatörlerle iligili literature katkıda bulunacaktır.

Önerilen q-analitik fonksiyonların inşası, simetrik q-analitik fonksiyonlara ve Fibonacci analitik fonksiyonlara genişletilmiştir. Bu şekilde, kompleks fakat standart olmayan analitik fonksiyonlar sınıfının tanımı, kompleks analize katkıda bulunacaktır. İlgili koherent durumlar ve Fock-Bargman temsili, kuantum enformasyon teorisindeki çalışmalara katkıda bulunacaktır. Ayrıca, çözümün q-temel fonksiyonlar cinsinden temsili, problemin kuantum dinamik simetri grubuna sahip olduğunu gösterir. Bu dinamik kuantum simetriyi bulduğumuzda, kuantum grup yapısı olan klasik hidrodinamik problemlerin keşfine katkıda bulunacağız.

Proje kapsamında elde edilen sonuçlar, özbenzerliğe ve kuantum simetriye sahip yeni soliton tipi çözümlerini ve onların kuantum mekanik devrelerindeki, trigonometrik spin dalga ve kuantum enformasyon kunularındaki rollerini anlamak için önem taşımaktadır. Önerdiğimiz keyfi dispersiyon ve kuantum simetriye sahip integrallenebilir modeller yeni, ve bu nedenle integrallenebilir doğrusal olmayan modeller ve onların q-deformasyonları ile ilgili klasik literature önemli bir katkı olacağına inanıyoruz. Ayrıca, bu modeller integrallenebilen sistemler konusunda yeni çalışma ve araştırma alanları yaratabilir. Örneğin, kuantum girdaplar q-bit olarak kuantum enformsoyon işleme konusunda algoritmalar verebilir. Yeni kuantum simetri grupları, değişmeli olmayan geometri ve resonant soliton konularında katkı sağlayabilir.

Kaynakça

[1] Andronov A A, Witt A A and Haikin S E 1981 *Vibration theory* (Moscow:Nauka)

[2] Arik M and Coon D D 1976 *J. Math. Phys.* **17** 524

[3] Arik F et all 1992 *Z Phys C* **55** 89-95

[4] Biedenharn L C 1989 *J. Phys. A.* **22** L873

[5] Bialynicka-Birula Z 1968 *Phy Rev* **173** 172

[6] Büyükaşık, S. A., Pashaev, O.K., Ulas-Tigrak, E., 2009, Exactly Solvable Quantum Sturm-Liouville Problems, J. Math. Phys., 50, 072102 (29pp).

[7] Büyükaşık Ş. A. and Çayiç Z. , J. Math. Phys. **57**, 122107 (2016).

[8] Caldirola P, Nouovo Cimento, **18**, 393 (1941).

[9] Dodonov V V, Malkin I A and Man'ko V I 1974 *Physica* **72** 597

[10] Erzan, A., Gorbon A., 1999, q-calculus and irreversible dynamics on a hierarchical lattice, Tr. J. Phy., 23 , 9-19.

[11] Erzan, A., Eckmann, J.P., 1997, q-analysis of fractal sets, Physical Review Letters, 78 ,3245-3248.

[12] Floratos E G and Tomaras T N 1990 *Physics Letters B* **251** 163 -166

[13] Glauber Roy J., Phys. Review, **131**, 2766(1963).

[14] Gavrilik A M, Kachurik I I and Rebesh A P 2010 *J. Phys. A: Math Theor* **43** 245204

[15] Kac, V., Cheung, P. , 2002, Quantum Calculus, Springer.

[16] Kanai E., Prog.Theo.Physics, **3**, 440(1948).

[17] Klauder J.R. , Annals of Phys., **11**, 123 (1960).

[18] Kuryshkin V V 1980 *Ann Fond Louis de Broglie***5** 111

[19] Kulish P P and Damaskinsky E V 1990 *J. Phys. A.* **23** L415

[20] Makhankov V G, Pashaev O K and Sergeenkov S A, 1985 *JINR Rapid Communications* **10-85** pp 45-52

[21] Macfarlane A J 1989 *J. Phys. A.* **22** 4581

[22] Malkin I A and Man'ko V I 1979 *Dynamical symmetries and coheren states of quantum systems* (Moscow: Nauka)

[23] Man'ko V I, Marmo G, Solimeno S and Zaccaria F 1993 *Int J Mod Phys* A8 3577

[24] Man'ko V I, Marmo G, Solimeno S and Zaccaria F 1993 *Phys Lett*A176 173

[25] Man'ko V I, Marmo G, Sudarshan E C G and Zaccaria F 1997 *Physica Scripta*55 528

[26] Nalci Tumer Sengul and Pashaev Oktay , q-Viscous Burgers' Equation: DynamicalSymmetry, Shock Solitons and q-SemiclassicalExpansion, arXiv:1707.01737v1, 2017

[27] Nalcı S., Pashaev O.K., 2010, ,Q-analogue of Shock soliton solution, J.Phys.A: Math. Theor. 43, 445205.

[28] Nieto M. M., arXiv:quant-ph/9708012v1 (1997).

[29] Pauli W 1980 *General Principles of Quantum Mechanics* (Berlin: Springer)

[30] Pashaev O K 2014 *J. Phys: Conf. Series* **482** 012033

[31] Pashaev O K 2016 *J. Phys: Conf. Series* **766** 012015

[32] Pashaev O K 2009 *Theor Math Phys* **160** 1022

[33] Pashaev O K 2015 *Physica Scripta* **90** 074010

[34] Pashaev O K and Yilmaz O 2008 *J. Phys. A. Math Theor* **41** 135207

[35] Pashaev O K and Yilmaz O 2011 *J. Phys. A. Math Theor* **44** 185501

[36] Pashaev O K and Lee J -Hao 2017 *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications SIGMA* **13** 058

[37] Rabi I I 1928 *Zeit f Physik* **49** 507

[38] Schrödinger E., Naturwissenschaften, **14**, 664(1926).

[39] Sagdeev R Z and Zaslavsky G M 1988 *Introduction to nonlinear physics: from the pendulum turbulenz and chaos*(Moscow: Nauka)

[40] Song X C 1990 *J. Phys. A.* **23** L821

[41] Spiridonov V 1995 *Phy Rev A* **52** 1909

[42] Stoler D 1971 *Phy Rev D* **4** 2309

[43] Sudarshan E.C.G.,Phys. Rev. Lett. **10**, 227 (1963).

[44] Sun C P and Fu H C 1989 *J. Phys. A.* **22** L983

[45] Vitiello G *Physics Letters A* **376** 2527-2532

[46] Wei J., Norman E., J.Math.Phys. **4**, 575(1963).

[47] Weyl H 1931 *The theory of groups and quantum mechanics* (New York: Dover)

[48] Yuen H.P. , Phys. Rev. A, **13**, No:6, 2226-2243 (1976).

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Prof. Dr. OKTAY PASHAEV
Proje No:	116F206
Proje Başlığı:	Genel Dispersiyona Sahip Doğrusal Olmayan Integrallenebilen Sistemler Ve Dinamik Kuantum Simetrileri
Proje Türü:	1001 - Araştırma
Proje Süresi:	24
Araştırmacılar:	ŞİRİN ATILGAN BÜYÜKAŞIK
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	İZMİR YÜKSEK TEKNOLOJİ ENS. FEN F. MATEMATİK B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	01/04/2017 - 01/04/2019
Onaylanan Bütçe:	301650.0
Harcanan Bütçe:	203456.0
Öz:	Bu projede, keyfi ve q-deforme olmuş dispersiyona sahip doğrusal olmayan yeni integrallenebilir sistemler ve tam çözülebilen dinamik quantum simetrilerine sahip kuantum modellerin hiyerarşisi inşa edildi. İlk olarak, normal koordinatlarda q- ve f- deforme olmuş osilatörler de dahil olmak üzere, klasik çok boyutlu integrallenebilen sistemler deforme olmuş keyfi deformasyona sahip doğrusal olmayan osilatörler olarak çözüldü. Schrödinger gösteriminde, keyfi dispersiyona sahip quantum parametrik osilatör denklemi çözüldü, quantum dinamik simetrileri bulundu, zamana bağlı evrim ve tam çözümleri de incelendi. Doğrusal olmayan integrallenebilen evrim denklemleri NLS, DNLS ve AKNS ile onların doğrusal gösterimleri için, doğrusal olmayan deformasyona sahip dispersiyonlar inşa edildi. Özel olarak, yineleme operatörün yardımıyla, q-deforme olmuş ve göreli dispersiyona sahip NLS, DNLS denklemler hiyerarşisi ve karşılık gelen rezonant soliton denklemleri elde edildi. Dinamik simetri ve evrim operatörü yöntemleri ile zamana bağlı ağırlık ve frekansa sahip kuantum parametrik osilatör için Schrödinger denklemi çözüldü. Bu modeller için koherent durumlar, sıkıştırılmış koherent durumlar, resonant ve sönümleme dinamikleri elde edildi. Kuantum Fourier dönüşümü yardımıyla, birin kökleri olan q ile ilişkili, kuantum grup simetrisi olarak koherent durumların superpozisyonu inşa edildi. Bu kaleydoskop durumlar kuantum enformasyon birimi olarak görülebilir. Tekli ve çoklu kubitler için Apollonius gösterimi bulundu. Halka biçimli bölgede N-poligon girdaplar ve onların doğrusal olmayan osilatör olarak quantizasyonu çalışıldı. Generik pq-Fibonacci ve altın analitik durumlar için q-analitik koherent durumlar ve ilgili Fock-Bargman gösterimleri tanıtıldı.
Anahtar Kelimeler:	Schrödinger denklemi, dinamik kuantum simetrileri, qubit, parametrik osilatör, koherent durumlar
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır
Projeden Yapılan Yayınlar:	1- Relativistic DNLS and Kaup-Newell Hierarchy (Makale - İndeksli Makale),

TÜBİTAK