

KRANK AÇILARI VERİLEN ÜÇ KONUM VE BİR ÖLÜ KONUM İÇİN DÖRT-ÇUBUK MEKANİZMASININ İŞLEV SENTEZİ

Tarık KADAK, Gökhan KİPER

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Makine Mühendisliği Bölümü 35430, İZMİR

tarikkadak@iyte.edu.tr, gokhankiper@iyte.edu.tr

Dört-çubuk mekanizmasının işlev sentezi, krank açıları ilişkisi ve ölü konum sentezinin karışık bir problemi olarak formüle edilebilir. Bu sentez probleminde, üç konum için krank ve sarkaç açıları ve dördüncü bir konum olarak bir ölü konumun krank açısı girdi olarak alınmıştır. Yazılan denklemler ve değişken elemeleri sonucunda herhangi bir nümerik yöntem ile çözülebilen tek değişkenli bir doğrusal olmayan denklem elde edilmiştir. Tek değişkenin hızlı çözümü ile mekanizmanın uzuv boyları bulunabilmektedir. Parametrik model kullanılarak Excel’de sayısal çözüm sayfası hazırlanmıştır. Sayısal örnekler genelde iki gerçel çözümün olduğunu göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: İşlev sentezi, Krank açıları ilişkisi, Ölü konum sentezi

FUNCTION SYNTHESIS OF FOUR-BAR MECHANISM FOR THREE POSITIONS WOTH GIVEN CRANK ANGLES AND A DEAD CENTER POSITION

ABSTRACT

The function synthesis of the planar four-bar mechanism can be formulated as a mixed problem of correlation of crank angles and dead-center position design. In this synthesis problem, the crank and rocker angles for three positions and, as a fourth position, the crank angle of a dead-center position were taken as input. As a result of elimination of equations, a univariate nonlinear equation that can be solved by any iterative method is obtained. The link lengths are determined by solving this univariate equation. The parametric model is implemented in Excel for numerical solution. Examples show that generically there are two real solutions.

Keywords: Function synthesis, Correlation of crank angles, Dead center design

1. GİRİŞ

İşlev sentezinde bir mekanizma (işlev üretici), mekanizmanın giriş ve çıkış uzuvları belli bir hareketi yaklaşık olarak sağlayacak, ya da belirli açı değerlerinde hareket edecek şekilde tasarlanır. Dört-çubuk mekanizmaları, işlev üretici olarak yaygın olarak kullanılmaktadır.

Problem dört-çubuk mekanizmasının girdi ve çıktı uzuvlarının yere göre belirli açı değerlerini sağlamasını gerekecek şekilde modellenirse Söylemez buna krank açılarının ilişkisi problemi demektedir [1].

Krank-sarkaç ve çift-sarkaç tipi dört-çubuk mekanizmalarında sarkaç iki açı sınırı arasında salınım yapar. Sarkaç bir sınırda iken dört-çubuk mekanizmanın konumlarına ölü konum denir. Dört-çubuk mekanizmasının iki ölü

konumu vardır: açık ölü konum, krank ve biyel uzuvlarının uzatılmış formda aynı doğrultuda olduğu konum iken kapalı ölü konum, krank ve biyelin üst üste katlandığı konumdur. Bir mekanizmanın sarkaç uzvunun salınım açısına (ve genellikle bu sarkaç açısına karşılık gelen krank dönme miktarına) göre tasarlanmasına ölü konum tasarımı denmektedir [1].

[2], [3] ve [4] gibi birçok klasik ders kitabı ölü konum tasarım problemini kapsamaz. Hall [5] ve Norton [6] ölü konum tasarımı ve krank açılarının ilişkisi problemlerini ayrı ayrı ele alır. Mallik vd. [7] ölü konum tasarımı hareket, yol ve işlev üretme problemlerine ek olarak dördüncü tip sentez problemi olarak sunar. Pennestrì ve Valentini [8], ölü konum tasarım problemleri de dâhil olmak üzere iki ve üç konum için dört-çubuk ve krank-biyel

mekanizmaları için analitik işlev sentezi yöntemlerini özetlemiştir.

Bazı uygulamalarda bir mekanizmanın hem bazı girdi/çıkı ilişkilerini sağlaması, hem de bir ya da her iki ölü konumu sağlaması gerekebilmektedir. Her ne kadar bu tarz bir problem günümüzde bir katı modelleme programı (örneğin Solidworks Sketcher) kullanılarak hızla çözülebilsede, işlev sentezi problemi çok devreli bir mekanizmanın tek bir devresi için çözülmesi gerektiğinde, tüm mekanizmanın tasarımının hızlı ve pratik bir şekilde yapılabilmesi için sentez probleminin analitik ya da yarı-analitik formülasyonu gerekmektedir. Örneğin bir iş makinasının yükleyici mekanizmasında kepçeye bağlı dört-çubuk devresinin tasarımı böyle bir problemdir.

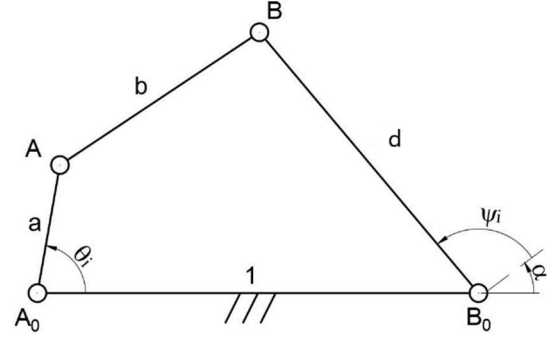
Kiper ve Erez [9], krank açıları verilen iki konum ve üçüncü konum olarak kapalı ölü konum için dört çubuk mekanizma sentezi probleminin analitik çözümünü sunmuşlardır. Kiper vd. [10], krank açıları verilen üç konum ve herhangi bir ölü konum için krank-biyel mekanizması tasarım denklemlerini formüle ederek 8. dereceden tek bilinmeyenli bir denkleme indirgedikleri problemi nümerik bir yöntem ile çözmüşlerdir. Bu çalışmada aynı problemin dört-çubuk mekanizması için formülasyonu yapılmıştır.

2. PROBLEM TANIMI

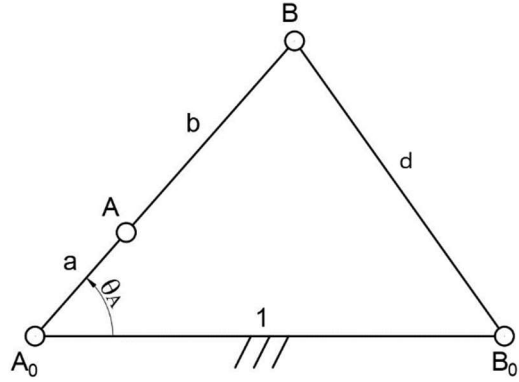
Krank açıları verilen üç konum ve herhangi bir ölü konumda bir krank açısı bilinen durumda uzuv boyları bulunmak istenmektedir. Mekanizmayı ölçeklendirmek girdi/çıkı açısı ilişkisini bozmayacağından sabit uzuv boyu 1 birim kabul edilip diğer uzuv boyları (daha doğrusu uzuv boy oranları) bulunması gerekir.

Krank açıları verilen üç konum (Şekil 1) ve verilen ölü konum (Şekil 2 ya da 3) için 4 denklem yazılabilir. Bilinmeyen uzuv boyları a , b ve d 'dir. Ayrıca sarkaç uzvunun açısının sabit mafsalları birleştiren doğrudan değil de, bu doğru ile α kadar açı yapan sabit bir doğrultudan ölçüldüğü (Şekil 1) kabul edilir ise yazılan 4 denklemden çözülmesi gereken bilinmeyen sayısı dördtür: a , b , d , α .

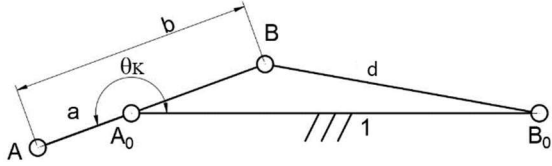
Şekil 1'deki gibi üç konum için, krank ve sarkaç açıları ($\theta_1, \psi_1, \theta_2, \psi_2, \theta_3, \psi_3$) ve açık ölü konum (AÖK) (Şekil 2) ya da kapalı ölü konumunda yalnızca krank açısı (θ_A ya da θ_K) verilmiş olacaktır.



Şekil 1. Krank açıları verilen konumlar



Şekil 2. Açık ölü konum



Şekil 3. Kapalı ölü konum

3. FORMÜLASYON

Dört-çubuk mekanizmasının girdi/çıkı denklemleri şu şekilde bulunur:

$$|\overline{AB}| = |\overline{A_0B_0} + \overline{B_0B} - \overline{A_0A}|$$

$$b^2 = [(1 + dc(\psi + \alpha) - ac\theta)]^2 + [ds(\psi + \alpha) - as\theta]^2 \Rightarrow$$

$$1 + a^2 - b^2 + d^2 - 2ac\theta + 2dc(\psi + \alpha) = 2ad c(\theta - \psi - \alpha)$$

Burada c ve s sırası ile kosinüs ve sinüsün kısaltmasıdır. Tüm denklem $2ad$ 'ye bölündüğünde

$$\frac{1 + a^2 - b^2 + d^2}{2ad} - \frac{1}{d} \cos \theta + \frac{1}{a} c(\psi + \alpha) = c(\theta - \psi - \alpha)$$

bulunur.

$$K_1 = \frac{1}{a}, \quad K_2 = \frac{1}{d}, \quad K_3 = \frac{1 + a^2 - b^2 + d^2}{2ad} \quad \text{olsun}$$

(Freudenstein katsayıları [11]). Bu durumda

$a = \frac{1}{K_1}$, $d = \frac{1}{K_2}$ ve $b^2 = 1 + a^2 + d^2 - 2adK_3$ olur.

Denklem üç konum için şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} K_1 c(\psi_1 + \alpha) - K_2 c\theta_1 + K_3 &= c(\psi_1 - \theta_1 + \alpha) \\ K_1 c(\psi_2 + \alpha) - K_2 c\theta_2 + K_3 &= c(\psi_2 - \theta_2 + \alpha) \\ K_1 c(\psi_3 + \alpha) - K_2 c\theta_3 + K_3 &= c(\psi_3 - \theta_3 + \alpha) \end{aligned}$$

Denklem matris şeklinde yazılıp çözülebilir:

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\psi_1 + \alpha) & -c\theta_1 & 1 \\ c(\psi_2 + \alpha) & -c\theta_2 & 1 \\ c(\psi_3 + \alpha) & -c\theta_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c(\psi_1 - \theta_1 + \alpha) \\ c(\psi_2 - \theta_2 + \alpha) \\ c(\psi_3 - \theta_3 + \alpha) \end{bmatrix}$$

Burada çözülen K_1 , K_2 ve K_3 , α açısına bağlıdır. KÖK ve AÖK için Şekil 2 ve Şekil 3'te görünen $A_0B_1B_0$ üçgenleri için kosinüs teoremi yazılır.

$$d^2 = 1 + (a + b)^2 - 2(a + b)c\theta_A$$

$$d^2 = 1 + (b - a)^2 + 2(b - a)c\theta_K$$

AÖK için $c(\theta_K - \pi) = -c\theta_K$ dir. Her iki denklemdeki kareler açıldığında

$$1 + a^2 + b^2 - d^2 + 2ab - 2ac\theta_A - 2bc\theta_A = 0$$

$1 + a^2 + b^2 - d^2 - 2ab - 2ac\theta_K + 2bc\theta_K = 0$ elde edilir. Bu denklemlerde $b^2 = 1 + a^2 + d^2 - 2adK_3$ kullanıldığında

$$1 + a^2 - adK_3 + ab - ac\theta_A - bc\theta_A = 0$$

$$1 + a^2 - adK_3 - ab - ac\theta_K + bc\theta_K = 0$$

bulunur. Her iki denklem sadeleştirilirse

$$\frac{1}{K_1} - \frac{K_1 - K_3/K_2}{1 - K_1 c\theta_A} = -b$$

$$\frac{1}{K_1} - \frac{K_1 - K_3/K_2}{1 - K_1 c\theta_K} = b$$

elde edilir. Bu denklemlerin karesi alınarak ve yine $b^2 = 1 + a^2 + d^2 - 2adK_3$ kullanılarak yalnızca α bilinmeyenini cinsinden tek bir denklem elde edilir. AÖK ve KÖK için elde edilen denklemler θ_A ve θ_K açısının farklı

olması haricinde tamamen aynıdır. Yani her iki durum için de matematiksel çözüm aynı olacaktır. Bu nedenle bu noktadan itibaren θ_A ve θ_K yerine θ_0 kullanılarak devam edilmiştir. $b^2 = 1 + a^2 + d^2 - 2adK_3$ kullanılarak:

$$\left(a + \frac{1 - adK_3}{a - c\theta_0} \right)^2 = 1 + a^2 + d^2 - 2adK_3$$

bulunur. Bazı sadeleştirmeler sonrasında

$$s^2\theta_0 A + c^2\theta_0 B + c\theta_0 C + D = 0 \quad (1)$$

elde edilir. Burada $A = K_1^2 K_2^2 - 2K_1 K_2 K_3$, $B = -K_1^2$, $C = 2(K_1 - K_2 K_3)$, $D = K_3^2 + K_2^2 - 1$ dir. Bu denklemin azami çözüm sayısını tespit edebilmek için yarım açının tanjantı dönüşümü kullanılabilir. $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ ve $i = 1, 2, 3$ için

$$c(\psi_i + \alpha) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} c\psi_i - \frac{2t}{1 + t^2} s\psi_i$$

$$c(\psi_i - \theta_i + \alpha) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} c(\psi_i - \theta_i) - \frac{2t}{1 + t^2} s(\psi_i - \theta_i)$$

olur. K_1 , K_2 ve K_3 , t cinsinden yazılır ise oluşan tek bilinmeyenli denklemin t cinsinde 12. derece bir denklem olduğu görülür. Yani azami 12 çözüm vardır. Ancak bu çözümlerden bazılarının karmaşık sayı olması, bazı çözümlerin ise aynı mekanizma çözümünü vermesi olasıdır.

4. SAYISAL ÇÖZÜM

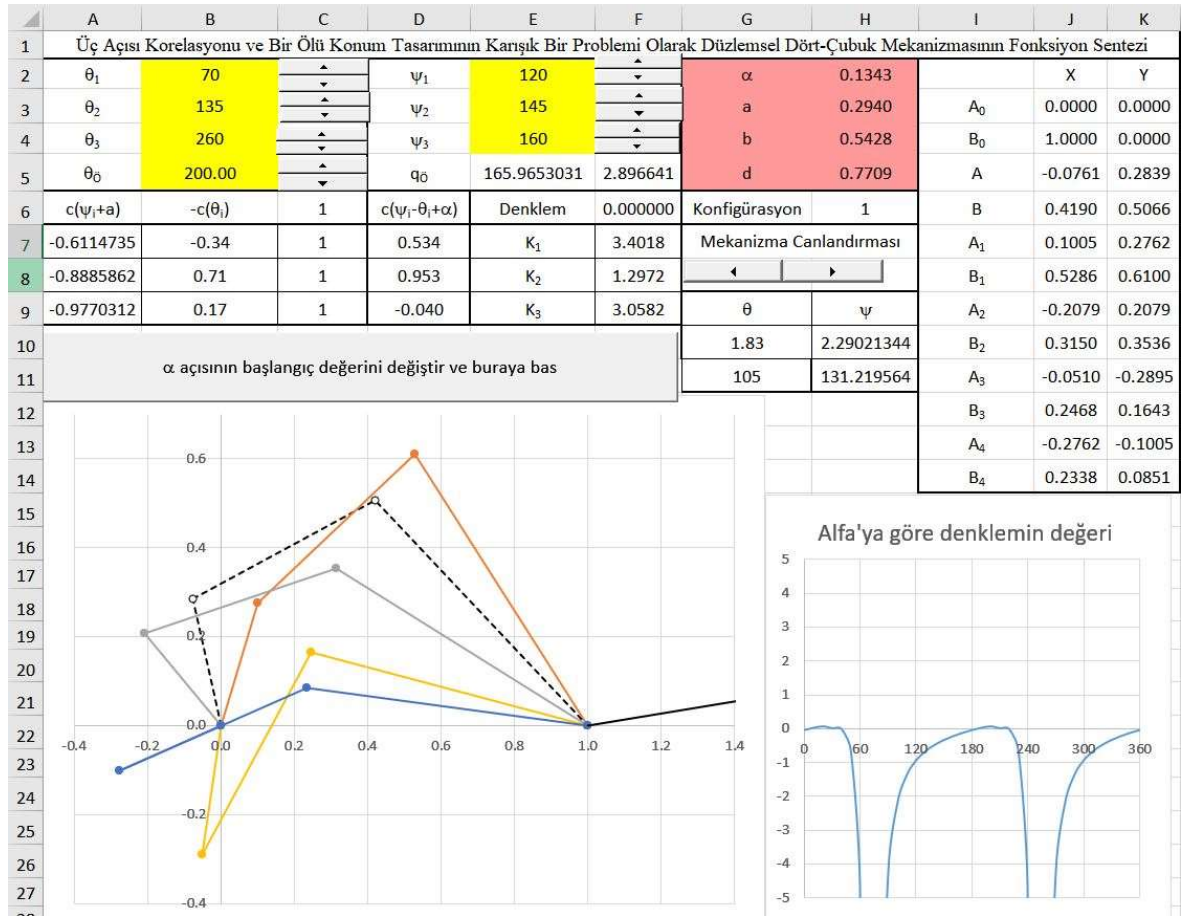
α çözümü için denklemin analitik bir çözümü olmadığından nümerik yöntemlerle çözüm gereklidir. Çözüm sayısını görmek için Denklem (1)'in solundaki ifade $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ için hesaplanıp α 'ya göre çizilerek, ifadenin sıfıra eşit olduğu α değerleri bulunabilir. Köklerin tam değeri bir başlangıç değerinden başlayan nümerik bir yöntem ile bulunabilir.

Kısım 2'deki formüller Excel'e girilerek bir sayısal çözüm sayfası oluşturulmuştur (Şekil 4 ve 5). Girdiler θ_1 , ψ_1 , θ_2 , ψ_2 , θ_3 , ψ_3 ve θ_0 dür. Bu açı değerler, değer değiştirme düğmesi ile değiştirildiğinde bu düğmelere atanan kısa komutlarla Excel eklentisi olan ve Newton-Raphson yöntemi kullanan bir çözücü, H2 hücreindeki α değerini değiştirerek F6

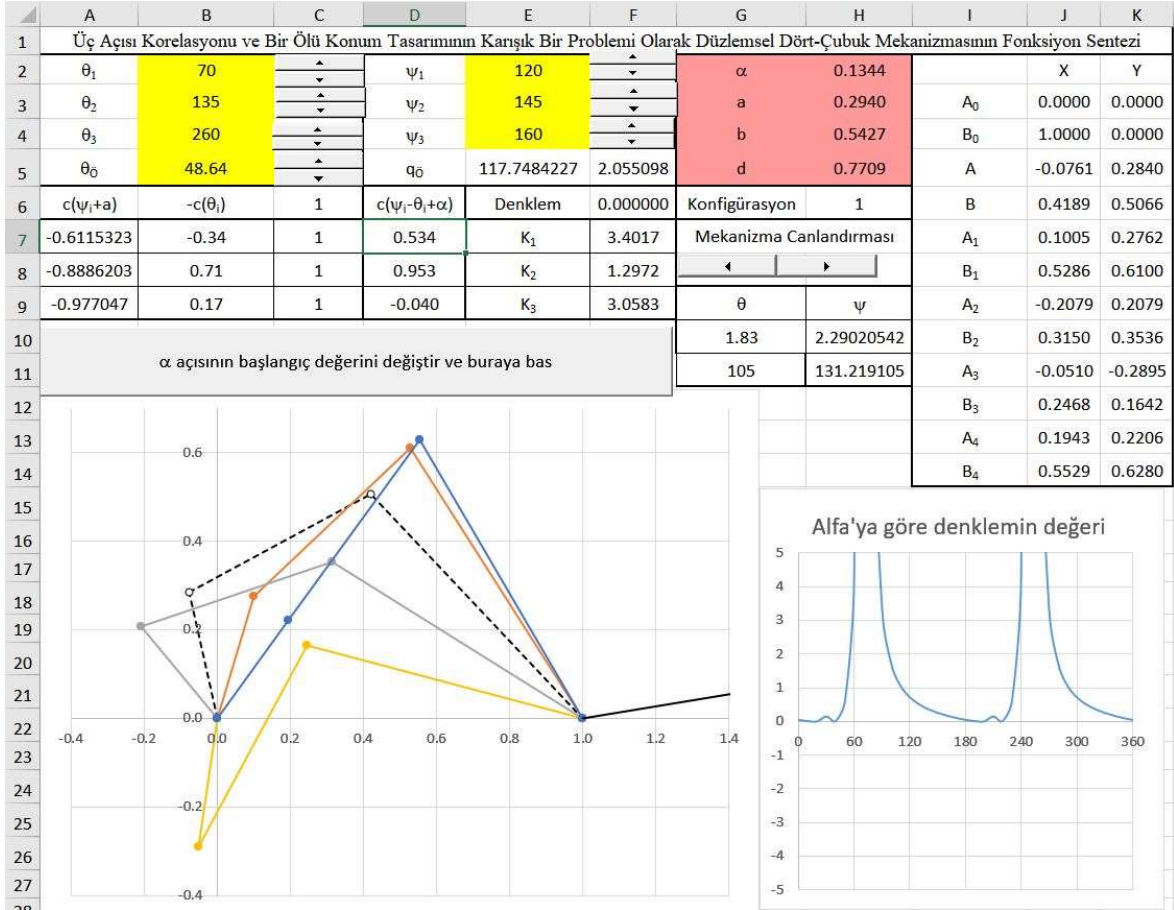
hücreindeki Denklem (1)'i sıfıra eşitlemektedir. Ayrıca, α değeri negatif uzuv uzunlukları verirse veya sonsuza giderse, α değeri manuel olarak değiştirilerek ve “ α açısının başlangıç değerini değiştir ve buraya bas” yazılı düğmeye basarak değerler güncellenebilir. Hem verilen konumları göstermek hem de mekanizmayı canlandırmak için birer grafik çizilmiştir.

Şekil 4 ve 5'te görüldüğü üzere uygun bir θ_0 değeri verildiğinde hem açık hem de kapalı ölü konumlar için uzuv boyları çözülebilmektedir.

Sayısal örneklerin tamamında α değeri bir çözüm ise $\alpha + 180^\circ$ değerinin de bir çözüm olduğu görülmüştür. Denklem bu 180° farklı çözümleri mekanizmanın aynı çözümüne denk gelmektedir, zira bir çözümde sarkaç boyu (d) pozitif, diğesinde negatiftir ($de^{i\alpha} = -de^{i(\alpha+\pi)}$ dir). Yani 12 kök, azami 6 mekanizma çözümüne denk gelebilir. Bazı örneklerde 12 kökün tamamının gerçel sayı olabileceği bulunmuştur. Karmaşık kökler eşlenikler halinde gelmektedir.



Şekil 4. AÖK için sayısal çözüm örneği



Şekil 5. AÖK için sayısal çözüm örneği

6 kökün de gerçel sayı olduğu durumlarda dört konumdan aynı bağda (açık ya da çapraz bağ) geçen bir mekanizma bulunamamıştır. Bu örneklerden biri Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1. 6 gerçel kökün bulunduğu bir örnek

Girdiler						
θ_1	θ_2	θ_3	θ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3
70°	120°	220°	200°	135°	140°	190°
Çözümler						
α_1	a	b	d			
10.4°	0.467	0.271	1.186			
13.9°	0.044	0.581	0.528			
16.4°	-0.833	1.445	1.382			
36.1°	1.540	1.421	1.113			
-165.7°	-0.051	5.971	5.094			
-0.6°	0.855	0.385	1.450			

Bazı örneklerde yalnızca 2 veya 4 gerçel kök bulunmuştur. 2 veya 4 gerçel kökün bulunduğu durumda en fazla 2 kökün kullanılması ile

oluşan mekanizma dört konumdan da aynı bağda geçmektedir. Diğer kökler kullanılarak oluşan mekanizmalar aynı bağda bütün konumlardan geçememektedir. Bu örneklerden 4 gerçel kök olan örnek Tablo 2’de ve 2 gerçel kök bulunan örnek Tablo 3’te verilmiştir. Bazı durumlarda gerçel kök bulunamamıştır, yani bütün kökler karmaşık eşlenikler şeklindedir. Bu örneklerden biri Tablo 4’te verilmiştir.

Tablo 2. 4 gerçel kökün bulunduğu bir örnek

Girdiler						
θ_1	θ_2	θ_3	θ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3
60°	135°	220°	200°	120°	140°	150°
Çıktılar						
α_1	a	b	d			
3.6°	0.128	0.730	0.480			
34.3°	-0.971	1.536	1.604			
34.8°	0.594	0.383	1.200			
40.9°	0.153	0.185	0.970			

Tablo 3. 2 gerçel kökün bulunduğu bir örnek

Girdiler						
θ_1	θ_2	θ_3	θ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3
60°	135°	160°	200°	120°	140°	150°
Çıktılar						
α_1	a	b	d			
17.5°	0.240	0.442	0.813			
α_2	a	b	d			
36.4°	-0.981	1.472	1.551			

Tablo 4. Gerçel kökün bulunmadığı bir örnek

Girdiler						
θ_1	θ_2	θ_3	θ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3
70°	110°	120°	220°	85°	150°	225°

5. SONUÇ

Bu çalışmada, krank açıları verilen üç konum ve herhangi bir ölü konumda bir krank açısı bilinen durumda bir dört-çubuk mekanizmasının işlev sentezi için gerekli formülasyon, sayısal çözüm yöntemi ve bazı sayısal örnekler sunulmuştur. Böyle bir problem, tüm denklemler aynı forma sahip olmadığı için geleneksel işlev sentezi problemlerinden farklıdır.

Önceki çalışmalarda [9-10] dört-çubuk ve krank-biyel mekanizmaları için bu çalışmadakine benzer problemler ele alınmıştır. Tek devreli ve tek serbestlik dereceli mekanizmalar için farklı sayıda krank açıları ve ölü konum verilen problemler tanımlanıp çözülebilir. Ayrıca bu problemlere bağlama açısı optimizasyonu problemi de dâhil edilebilir. Bu problemler ileriki çalışmaların konusu olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Söylemez, E. (2017). *Makine Teorisi I: Mekanizma Tekniği*, 4. Baskı, Birsen, İstanbul.
- [2] Sandor, G. N., Erdman A. G. (1984). *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis*, Prentice Hall, New Jersey.
- [3] Hartenberg, R. S., Denavit, J. (1964). *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGraw-Hill, New York.

[4] McCarthy, J. M., Soh, G. S. (2011). *Geometric Design of Linkages*, Springer, New York.

[5] Hall, A. S. (1961). *Kinematics and Linkage Design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

[6] Norton, R. L. (2019). *Design of Machinery*, McGraw-Hill, Boston.

[7] Mallik, A. K., Ghosh, A., Dittrich, G. (1994). *Kinematic Analysis and Synthesis of Mechanisms*, CRC, Boca Raton.

[8] Pennestrì, E., Valentini, P. P. (2009). A review of simple analytical methods for the kinematic synthesis of four-bar and slider-crank function generators for two and three prescribed finite positions. *Buletin Stiintific Seria Mecanica Aplicata*, 128-143 Universitatea din Pitești, Pitești, 128-143. DOI 10.13140/RG.2.1.2326.9528.

[9] Kiper, G., Görgülü, İ., Küçüköğlü, S.F. (2020). Function generation synthesis of planar slidercrank linkages for given 3 positions and a dead-center position, *EuCoMeS 2020: New Trends in Mechanism and Machine Science*, 41-47, Springer, Cham. DOI 10.1007/978-3-030-55061-5_6.

[10] Kiper, G., Erez, M. (2020). Function generation synthesis with planar 4-bar linkage as a mixed problem of correlation of crank angles and dead-center design. *Recent Advances in Mechanisms, Transmissions and Applications: Proceedings of the Fifth MeTrApp Conference 2019*, Springer, Singapore, 42-47. DOI 10.1007/978-981-15-0142-5_5

[11] Freudenstein, F. (1954). An analytical approach to the design of four-link mechanisms. *Trans. ASME*, 76, 483-492. DOI 10.1007/s12045-010-0084-7.