

# Özilinti Matrisinin Oluşturulma Yönteminin Modele Dayalı Sinüzoidal Parametre Kestirimindeki Etkileri

## Effects of the Autocorrelation Matrix Generation Method on the Model-Based Sinusoidal Parameter Estimators

Mustafa A. Altinkaya

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü  
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Gülbahçe Köyü, 35430, Urla, İzmir

mustafaaltinkaya@iyte.edu.tr

### Özetçe

Toplanır gürültüde gözlemlenen sinüzoidlerin parametre kestiriminde teorik en iyi olan en büyük olabirlik kestiriminin hesaplanması genellikle doğrusal olmayan eniyileme problemlerinin çözümünü gerektirdiği için zordur. Bu yüzden üstün ayırıcılık özellikleri ile öne çıkan modele dayalı parametre kestiricileri yaygın olarak kullanılmışlardır. Bu kestiricilerin büyük bölümünde ilk olarak bir özilinti matrisi oluşturulmaktadır. Bu matrisin oluşturulmasındaki farklılıklarının kestiricilerin başarımlarına etkisinin ilişkilendirilmesi bu çalışmada ele alınmıştır.

Özilinti matrisi Töplitz bir yapıda yanlı veya yansız özilinti kestirimleriyle oluşturulabileceği gibi ortak değişinti yöntemindeki şekilde simetrik ancak Töplitz olmayan bir yapıda da oluşturulabilir. Töplitz özilinti matrisi Töplitz olmayan özilinti matrisinin pertürbe edilmiş hali olarak düşünülebilir. Töplitz ve Töplitz olmayan özilinti matrisleriyle MUSIC frekans kestirimindeki başarımların farklılıkları özilinti matrisi kestirimindeki pertürbasyonla ilişkilendirilmiştir. Bunun için tek bir gerçel sinüzoidin frekans kestirimi probleminde  $3 \times 3$  boyutlu özilinti matrisine MUSIC kestiricisi uygulanmıştır. Bu tek boyutlu gürültü altuzayı durumunda kestirici başarımının pertürbasyonla analitik gösteriminin doğruluğu benzetim sonuçlarıyla örtüşmesi yoluyla ortaya konmuştur. Çalışmanın bir yan ürünü olarak veri süzgeçlemesinin Töplitz özilinti matrisi kullanımıyla oluşan pertürbasyonun etkisini büyük ölçüde ortadan kaldırdığı benzetim çalışmaları yoluyla gösterilmiştir.

### Abstract

Although the maximum likelihood method gives the optimum solutions for the parameter estimation problem of the sinusoids embedded in noise, it is computationally difficult since it generally requires to solve nonlinear optimization problems. So some model-based parameter estimators with high frequency resolution property are preferred quite often. In order to find these estimates the first step is usually forming the autocorrelation (AC) matrix. In this work the effects of the method utilized in the generation of the AC matrix on the performances of sinusoidal parameter estimators are investigated.

One way of forming the AC matrix is to use a Toeplitz structure with either the biased or the unbiased AC lag estimates as the matrix elements. Another way is to use the so-called "covariance method" in the AC matrix generation. In this method the matrix formed is no longer Toeplitz but it is still symmetric. We can think of that the Toeplitz AC matrix is a perturbed version of the non-Toeplitz AC matrix. The differences in the performances of the MUSIC spectral estimator with Toeplitz and non-Toeplitz AC matrix usage is related to the perturbation in the AC matrix estimate. For this purpose the  $3 \times 3$  AC matrix is utilized in the estimation of the frequency of a single sinusoid using the MUSIC frequency estimator. The accuracy of the perturbation analysis is checked with the simulation results. Additionally, the fact that the performance of an estimator with data windowing and Toeplitz AC matrix generation becomes near to the performance of the same estimator with non-Toeplitz AC matrix is shown with simulation studies.

### 1. Giriş

Toplanır gürültü ile bulaşmış sinüzoidlerin parametre kestirimi çeşitli alanlardaki sinyal işleme uygulamalarında karşılaşılan temel bir problemdir. Bu problemin çözümü için çoğunlukla ikinci kerteli olmak üzere yüksek kerteli veya kesirli düşük kerteli istatistikleri kullanan çok çeşitli parametre kestirim yöntemleri geliştirilmiştir. En büyük olabirlik kestirimi teorik olarak en başarılı sonuçları vermekle birlikte doğrusal olmayan eniyileme problemlerinin çözümünü gerektirdiği için çok kere bunun yerine üstün çözünürlük yetenekleriyle öne çıkan modele dayalı parametre kestiricileri tercih edilmişlerdir. Bu çalışmada ele alınan ikinci kereden istatistikleri kullanan modele dayalı sinüzoidal parametre kestirimi yöntemlerinde genellikle verinin özilinti matrisi oluşturulmakta ve bu matris kullanılarak istenilen parametreler kestirilmektedir.

Özilinti matrisinin özeanalizi yapılarak sinyal ve gürültü altuzayına ait özvektörlerden yalnızca sinyal ya da yalnızca gürültü altuzayına ait özvektörlerin kullanımıyla ilk özilinti matrisi kestiriminin kullanımından daha başarılı kestirimler yapılabilmektedir. Elbette burada kaç özvektörün sinyal kaçının gürültü altuzayına ait olduğunun bilgisi kullanılmaktadır. Veri-

den sinyal altuzayının boyutunu belirleme yöntemleri teknik yazında çok incelenmiştir [1] ve standart bir yöntemle önceden kestirildiği kabul edilebilir.

Bu çalışmada sözedilen özilinti matrisinin oluşturulmasındaki farklı yaklaşımların modele dayalı sinüzoidal parametre kestiricilerinin başarımına etkileri araştırılmıştır. 2. bölümde kullanılan sinyal modeli ve kestiriciler anlatılmaktadır. 3. bölümde ise özilinti matrisinin yanlı veya yansız özilinti kestirimleriyle oluşmuş sürümlerinin birbirlerinin pertürbasyona uğramış şekilleri olarak gösterilmesi ve bu yöntemlerdeki başarımların farklılıklarının pertürbasyon analiziyle gösterimi anlatılmaktadır. 4. bölümde yapılan pertürbasyon ve benzetim uygulamaları verilmektedir. Çalışma sonucu elde edilen varyanslar 5. bölümde bulunmaktadır.

## 2. Sinyal Modeli ve Kullanılan Kestiriciler

Sinyal gerçek sinüzoidallerin toplamından oluşmakta,

$$s_n = \sum_{k=1}^K A_k \sin(\omega_k n + \theta_k) \quad (1)$$

ve toplanır beyaz Gauss gürültü ortamında gözlemlenmektedir:

$$x_n = s_n + z_n \quad n = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Burada bilinmeyen parametrelerin  $k$ 'nci ton sinyali için genlik  $A_k$ , ton sıklığı  $\omega_k$  ve evre açısı  $\theta_k$  olduğu varsayılmıştır.  $N$  veri örneklerinin sayısını,  $K$  ton sinyallerinin sayısını göstermektedir.  $x_n$  ve  $z_n$  ise gözlemlenen dizi  $X_n$  ve beyaz Gauss gürültü dizisi  $Z_n$ 'nin gerçeklenimleridir.

$R$  matrisinin elemanlarını kestirmek üzere veri dizisiyle aşağıdaki matrisler oluşturulur.

$$\begin{aligned} L_m &= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m-1} & \cdots & x_1 & 0 \end{bmatrix}_{(m-1) \times m} \\ T_{m,N} &= \begin{bmatrix} x_m & \cdots & \cdots & x_1 \\ x_{m+1} & \cdots & \cdots & x_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_N & \cdots & \cdots & x_{N-m+1} \end{bmatrix}_{(N-m+1) \times m} \\ U_{m,N} &= \begin{bmatrix} 0 & x_N & \cdots & x_{N-m+2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_N \end{bmatrix}_{(m-1) \times m} \\ X_{m,N} &= \begin{bmatrix} L_m \\ T_{m,N} \\ U_{m,N} \end{bmatrix}_{(N+m-1) \times m} \end{aligned} \quad (3)$$

Bu matrisleri kullanarak Töplitz yapıdaki ve elemanları yanlı özilinti kestirimleri olan

$$\hat{R}_{m,N} = \frac{1}{N} X_{m,N}^T X_{m,N} \quad (5)$$

ve yansız özilinti kestirimlerinden oluşan ancak simetrik olmakla birlikte Töplitz olmayan

$$\hat{R}_{m,N} = \frac{1}{N-m+1} T_{m,N}^T T_{m,N} \quad (6)$$

elde edilir.

Bu çalışmada (5) ve (6)'da verilen yanlı ve yansız  $R$  matrislerine MUSIC yönteminin uygulanması ile elde edilen frekans kestiriciler kullanılmıştır. MUSIC frekans kestirimleri

$$\text{MUSIC}(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=2K+1}^m |d^H \hat{v}_i|^2} \quad (7)$$

ifadesindeki MUSIC güç spektrumunun tepe değerleri olarak bulunur. Burada  $d = [1 \exp\{j\omega\} \cdots \exp\{j\omega(M-1)\}]^T$  karmaşık sinüzoidal vektör,  $\{\hat{v}_i, i = 2K+1, \dots, m\}$  ise  $R$  matrisinin en küçük  $m - 2K$  özdeğerine ait kestirilen gürültü altuzayı kolon özvektörleridir.

## 3. Özilinti Matrislerinin Karşılaştırılması ve Pertürbasyon Analizi

Bu çalışmada ele alınan MUSIC kestiricisi için teknik yazında çok sayıda pertürbasyon analizi bulunmaktadır [2, 3, 4]. Bunların hepsi geliş yönü kestirimi problemindeki duyarlılığın neden olduğu pertürbasyonla ilgili çalışmalardır. Bu çalışmada ele alınan problemde ise MUSIC kestiricisi bir zaman serisindeki beyaz gürültü ile bulaşmış sinyallerin frekanslarını kestirmekte kullanılmaktadır. MUSIC kestiricisi ile zaman serisi kestiriminde yaygın olarak kullanılan yansız özilinti kestirimlerinden oluşan  $\hat{R}_{m,N}$  yerine kestirimde

$$\hat{\hat{R}}_{m,N} = \hat{R}_{m,N} + \epsilon_{m,N}$$

şeklinde  $\hat{\hat{R}}_{m,N}$ 'nin

$$\epsilon_{m,N} = [L_m \ U_{m,N}]^T [L_m \ U_{m,N}]$$

ile pertürbe edilmiş sürümünün kullanılması başarımda düşmeye neden olmaktadır. Ashında  $\hat{\hat{R}}_{m,N}$  özilinti yöntemiyle oluşturulan özilinti matrisi olup MUSIC kestiricisinin tek boyutlu gürültü altuzayı kullanan şekli olan Pisarenko frekans kestiricisinde kullanılan yöntemdir. Teknik yazında bu yazarın bilgisi dahilinde MUSIC kestiricisi ile zaman serilerinin frekans kestiriminde yanlı özilinti matrisi kestirimi  $\hat{\hat{R}}_{m,N}$ 'nin kovaryans yöntemiyle oluşturulan yansız  $\hat{R}_{m,N}$ 'nin pertürbe edilmiş hali olarak gösterildiği bir pertürbasyon analizi yapılmamıştır. Bir altuzay tekniği olan MUSIC kestiricisinde verinin özilinti matrisi altuzay ayrıştırması ile

$$R = U_s \Lambda_s U_s^H + U_n \Lambda_n U_n^H \quad (8)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada  $U_s$  sinyal altuzayını  $U_n$  ise gürültü altuzayını yayan birim dikgen kolon özvektörlerin yanyana dizilmesiyle oluşturulan matrisler olup  $\Lambda_s$  ve  $\Lambda_n$  de bu özdeğerlerle oluşturulan köşegen matrislerdir.

$$\hat{R} = R + \delta R$$

olup  $\delta R$  özilinti matrisine uygulanan pertürbasyonu gösterirken,  $\hat{R}$  altuzay ayrıştırması ile

$$\hat{\hat{R}} = \hat{U}_s \hat{\Lambda}_s \hat{U}_s^H + \hat{U}_n \hat{\Lambda}_n \hat{U}_n^H \quad (9)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada  $\hat{(\cdot)}$  ile gösterilen matrisler (8)'deki ilgili matrislerin pertürbe edilmiş sürümleridir. [5]'deki yöntemi benimseyerek bu matrislerin herbiri için

$$\hat{\Lambda}_n = \Lambda_n + \delta \Lambda_n$$

örneğinde olduğu gibi ikinci kerteğe kadar pertürbasyonları içeren bir pertürbasyon modeli verebiliriz.  $R = Z + \sigma_v^2 I$  şeklinde olup,  $Z$  bütün sinyal bileşenlerinin kovaryansı ve  $\sigma_v^2$  toplanır beyaz Gauss gürültüsünün varyansı ise  $Z$ 'nin altuzay ayrıştırması  $Z = U_s \Omega U_s^H$  şeklinde olur. Burada (8)'deki köşegen matrisler  $\hat{\Lambda}_s = \Omega + \sigma_v^2 I$  ve  $\hat{\Lambda}_n = \sigma_v^2 I$  olmaktadır. Gürültü altuzayının pertürbasyonu

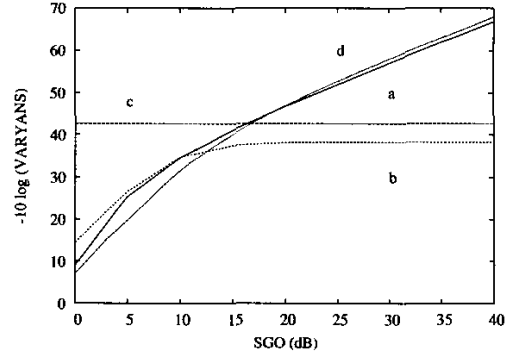
$$\begin{aligned} \delta U_n &\approx -Z^\dagger \delta R U_n + Z^\dagger \delta R Z^\dagger \delta R U_n \\ &\quad - (Z^\dagger)^2 \delta R U_n U_n^H \delta R U_n \\ &\quad - \frac{1}{2} U_n U_n^H \delta R (Z^\dagger)^2 \delta R U_n \end{aligned} \quad (10)$$

şeklinde elde edilir. Bu çalışmada  $\delta U_n = \varepsilon_{m,N}$  alınarak özilinti matrislerindeki farkın gürültü altuzayı özvektörlerinde neden olduğu pertürbasyon bulunmuştur.  $\hat{U}_n$  ile yapılan MUSIC frekans kestirimlerinin gerçek frekanslardan farklarının kareleri kestirim varyansları için geliştirilmiş analitik bir çözümdür.

#### 4. Uygulamalar

Özilinti matrislerinin oluşturulması sırasında benimsenen yöntemler sonucunda bu matrislerin sürümleri arasında oluşan fark bir pertürbasyon olarak modellendiğinde bulunan kestirim başarımları benzetim sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

Benzetim ve pertürbasyon analizi sonuçlarını karşılaştırmak için 2. bölümde verilen sinyal modelinde  $K = 1$  ve  $m = 3$  olduğunda MUSIC yöntemiyle frekans kestirimi yapılmıştır. Bu değerler için MUSIC yönteminin kullanımıyla elde edilen kestiriciler yansız özilinti matrisi  $\hat{R}_{3,N}$  kullanıldığında MUSIC-3, yanlı özilinti matrisi  $\hat{R}_{3,N}$  kullanıldığında ise Pisarenko kestiricisi olarak anılacaktır. Şekil 1'de  $f = 0.5$  frekansında  $N = 50$  iken kestiricilerin varyansları sinyal gürültü oranının (SGO) işlevi olarak verilmektedir. Benzetim olarak MUSIC-3 ve Pisarenko kestiricileriyle 10000 gürültü ve evre gerçekleşimi ile yapılan benzetimlerin varyansları çizdirilmiştir. Pisarenko kestiricisinde 38 dB seviyesinde görülen doyma etkisi pertürbasyon modeliyle elde edilen analitik varyans eğrisiyle büyük oranda örtüşmektedir. Pertürbasyon hesaplamalarında rasgele evrenin etkisi  $[0, 2\pi)$  aralığında düzgün olarak dağıtılmış 10 adet evre ile elde edilen değerler ortalanarak hesaplara katılmıştır. Pisarenko kestiricisinin varyans eğrisinde görülen doyma etkisini veri süzgeçlemesinin ortadan kaldırdığı görülmüştür. Bu durum 4. kereden Blackman-Harris [6] veri penceresi kullanılan Pisarenko kestiricisinin Şekil 1'deki başarımlar eğrisinde görülmektedir. Veri penceresi kullanımı frekans kestiricilerinin çözünürlüğünü azaltma dezavantajına rağmen  $\hat{R}_{m,N}$  matrisini kullanan frekans kestiricilerde yüksek SGO değerlerindeki doyma etkisini ortadan kaldırmak için kaçınılmaz olmaktadır. Gürültü altuzayının çok boyutlu olduğu durumlarda da veri penceresinin etkisini gözlemlemek için 8 boyutlu gürültü altuzayı kullanan MUSIC-10 kestiricisiyle yine beyaz Gauss gürültü ile bulaşmış tek ton sinyalinin frekans parametresi kestirilmiştir. Şekil 2'de görüldüğü gibi yine en yüksek başarımları  $\hat{R}_{10,50}$ 'yi kullanan MUSIC-10 kestiricisi sağlamıştır.  $\hat{R}_{10,50}$ 'yi kullanan MUSIC-10 kestiricisinin varyansını SGO'nun işlevi olarak gösteren eğride Pisarenko kestiricisinde olduğu gibi doyma etkisi görülmekte,



Şekil 1: Töplitz olmayan özilinti matrisi kullanan MUSIC-3 ve Töplitz özilinti matrisi kullanan Pisarenko kestiricilerinin frekans kestirim varyanslarının SGO'ya bağlı değişimi, a: MUSIC-3, b: Pisarenko, c: Pisarenko için analitik pertürbasyon değeri, d: veri pencerelessi Pisarenko ( $N = 50$ ,  $f=0.5$ , 10000 gürültü ve faz gerçekleşimi.)

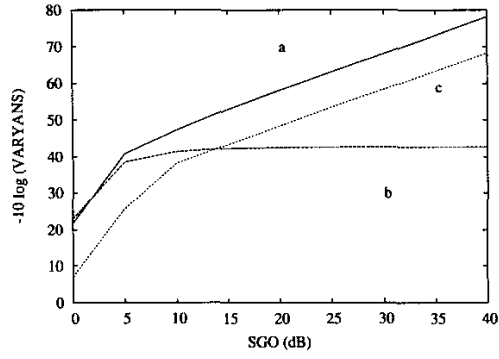
bu etki ise Blackman-Harris veri penceresinin  $R$  matrisinin oluşturulmasından önce kullanılmasıyla ortadan kaldırılmaktadır. Veri pencerelemesiyle oluşan sinyal gücü kaybı ise veri penceresi olmaksızın  $\hat{R}_{10,50}$ 'yi kullanan MUSIC-10 kestiricisinin yaklaşık 10 dB SGO avantajı sağlamasıyla görülmektedir.

#### 5. Vargular

Bu çalışmada asimptotik olarak en büyük olabirlik kestirimine olanak veren yansız özilinti matrisinin yerine yanlı Töplitz yapıdaki özilinti matrisinin kullanımıyla MUSIC kestiricisinde ortaya çıkan başarımlar farklılığı için analitik bir pertürbasyon ifadesi verilmiştir. Kullanılan yöntem özilinti matrisinin altuzay ayrıştırmasındaki altuzay unsurlarının ikinci kereden pertürbasyon ifadelerinin MUSIC kestirimine yansımalarının gösterilmesidir. Tek boyutlu gürültü altuzayı durumunda kestirici başarımlarının pertürbasyonla analitik gösteriminin doğruluğu benzetim sonuçlarıyla örtüşmesi yoluyla ortaya konmuştur. Çalışmanın bir yan ürünü olarak veri süzgeçlemesinin Töplitz özilinti matrisi kullanımıyla oluşan pertürbasyonun etkisini büyük ölçüde ortadan kaldırdığı benzetim çalışmaları yoluyla gösterilmiştir.

#### 6. Kaynakça

- [1] S. M. Kay, Modern Spectral Estimation: Theory and Application, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1988.
- [2] Swindlehurst, A. L. and Kailath, T., "A Performance Analysis of Subspace-Based Methods in the Presence of Model Errors, Part I: The MUSIC algorithm", *IEEE Trans. on Signal Processing*, **40** (7) (1992) 1758-1774.
- [3] Friedlander, B., "A sensitivity analysis of the MUSIC algo-



Şekil 2: Töplitz olmayan ve Töplitz özilinti matrisi kullanan MUSIC-10 kestiricilerinin frekans kestirim varyanslarının SGO'ya bağlı değişimi, a: MUSIC-10, b: MUSIC-10 (Töplitz  $R$ ), c: MUSIC-10 ( pencerelenmiş veri ve Töplitz  $R$ ) ( $N = 50$ ,  $f=0.5$ , 10000 gürültü ve faz gerçekleşimi.)

rithm", *IEEE Trans. on Signal Processing*, **38** (10) (1990) 1740-1751.

- [4] Hamza, R. and Buckley, K., "An analysis of weighted eigenspace methods in the presence of sensor errors", *IEEE Trans. on Signal Processing*, **43** (5) (1995) 1140-1150.
- [5] Xu, Z., "Perturbation analysis for subspace decomposition with applications in subspace-based algorithms", *IEEE Trans. on Signal Processing*, **50** (11) (2002) 2820-2830.
- [6] Nuttall, A. H., "Some windows with very good sidelobe behavior", *IEEE Trans. on Signal Processing*, **29** (1) (1981) 84-91.