

Kaotik İşaretlerde Wiener ve Kalman Yöntemleri Kullanarak Gürültü Süzgeçleme

Noise Reduction in Chaotic Signals by Using Wiener and Kalman Filtering Methods

Emre Çek¹, Ömer Oral², Olcay Akay³

¹Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, İzmir

²Makine Mühendisliği Bölümü, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir

³Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir

emrecek@iyte.edu.tr, omeroral@hotmail.com, olcay.akay@eee.deu.edu.tr

Özetçe

Bu çalışmada, kaotik davranış gösteren Lojistik eşleminden elde edilen işarete bulaşan eklentisel beyaz gürültü, Wiener, Genişletilmiş ve “Unscented” Kalman süzgeçleri kullanılarak azaltılmaya çalışılmıştır. Kaotik sistemlerin değişmezlerinden olan ilinti boyutu ve ortalama karesel hata değerleri başarımlar benzetimlerini bulmakta kullanılmış ve seçilen yöntemlerin birbirine göre avantajının çalışılan işaret gürültü oranına bağlı olarak değiştiği görülmüştür.

Abstract

In this paper, the additive white noise was filtered from chaotic signals obtained by Logistic map by using Wiener, Extended and Unscented Kalman filters, respectively. Performances of each method were compared by finding mean square error versus signal to noise ratio (SNR) and correlation dimension which is one of the invariants of the chaotic dynamical systems. It was observed that, each method exhibits different MSE performances depending on the particular signal to noise ratio.

1. Giriş

Doğada gözlenen biyolojik, sismik, meteorolojik v.b. kaynaklı işaretlerin kaotik davranış gösterebildiği bilinmektedir [1]. Bu nedenle, kaotik işaretlerin gürültüden arındırılması pek çok uygulamada karşılaşılan bir problemdir. Kaotik işaretler, gürültü gibi geniş bantlı bir frekans tayfına sahip oldukları için, doğrusal süzgeçleme yöntemleri ile gürültünün deterministik davranış sergileyen kaotik işaretlerden arındırılması mümkün değildir [2]. Temelde kaotik işaretlerden gürültünün arındırılması gözü kapalı kaynak ayırıştırma, yarı gözü kapalı kaynak ayırıştırma ve referans işaretinin bilindiği varsayılarak süzgeçleme olmak üzere üç temel yöntem ayrılmıştır [2,3]. Bu çalışmanın da konusu olan yarı gözü kapalı kaynak ayırıştırma yöntemine göre en önemli varsayım, temiz işarete ilişkin özilinti vektörü, ortak değişinti matrisi gibi istatistiksel verilerin veya sistemin dinamiklerinin bilindiğidir. Bu varsayımlar altında kaotik işaretlerden gürültünün süzülmesi çeşitli çalışmaların konusu olmuştur [4,7-8]. Bu çalışmada ise nedensel sonsuz dürtü yanıtı (IIR) Wiener süzgeci ile genişletilmiş ve “unscented” Kalman süzgeçlerinin başarımlarının farklı işaret gürültü oranlarında karşılaştırılması, matematiksel ifadesi (1) ile gösterilen Lojistik eşleminden elde edilen zaman serisinde uygulanmıştır

$$s(n+1) = r \cdot s(n)(1 - s(n)). \quad (1)$$

Yukarıdaki denklemde r çatallanma parametresi olup kaotik durumun bulunduğu 3.6 ve 4.0 değerleri için benzetimler gerçekleştirilmiştir. İkinci bölümde Wiener süzgecine ilişkin bilgi verilmekte, üçüncü bölümde ise genişletilmiş ve “Unscented” Kalman süzgeçleri hakkında bilgi verilmektedir. Gürültüden arındırılmış işaretin farklı işaret gürültü oranlarına karşılık gelen ortalama karesel hata değerleri ve 30 dB işaret gürültü oranında elde edilen zaman serilerinin ilinti boyutları bulunarak başarımlar benzetimleri dördüncü bölümün konusu olmuştur. Sonuç bölümünde elde edilen verilere ilişkin saptamalar bulunmaktadır.

2. Wiener Süzgeci

Birinci bölümde (1) ile belirtilen zaman serisine beyaz gürültü v 'nin eklenmesiyle oluşan gürültülü işaret x , $n = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere (2)'de verilmiştir

$$x(n) = s(n) + v(n). \quad (2)$$

Nedensel sonsuz dürtü yanıtı Wiener süzgecinin bu işarete uygulanmasıyla elde edilen kestirim sonucu (3) ile ifade edilmiştir [9]

$$\hat{s} = \mu_s + C_s (C_s + C_v)^{-1} (x - \mu_s). \quad (3)$$

Yukarıdaki denklemde $\mu_s \in \mathbb{R}^N$ ve $C_s \in \mathbb{R}^{N \times N}$ sırasıyla temiz işarete ilişkin ortalama vektörü ve (4)'te gösterilen özilinti fonksiyonundan elde edilen ortak değişinti matrisidir ve (5) ile gösterilmiştir

$$R_s[k] = \sum_n s[n]s[n-k] \quad (4)$$

$$[C_s]_{ij} = R_s[|i-j|] - \mu_s^2. \quad (5)$$

3. Genişletilmiş ve “Unscented” Kalman Süzgeçleri

3.1. Genişletilmiş Kalman Süzgeci

Genişletilmiş Kalman süzgeci doğrusal olmayan ayrık dinamik sistemlerin durum değişkenlerinin kestirilmesi için etkili bir yöntemdir. Sistemin belirli bir durumu için dinamik denklemler nominal bir yörünge etrafındaki küçük salınımlar

için doğrusallaştırıldıktan sonra doğrusal kestirim yöntemleri uygulanabilir. Burada nominal yörünge yerine durum değişkenleri vektörünün o andaki kestirilmiş değerleri alınır ve bu vektör etrafında gerçek yörünge Taylor serilerine açılarak doğrusallaştırılır [5, 6]. Kestirim hatasının kovaryans değeri, doğrusal olmayan sistemin gözlemlenebilirliğine ilişkin bilgi içermektedir. Bu durumda, eğer dinamik sistemin gözlenebilirliği yeterliyse, doğrusallaştırmanın gerçekleştirildiği kestirilmiş yörünge ile gerçek yörünge arasındaki sapma doğrusallaştırma işlemini geçerli kılacak kadar küçük olmaktadır [5].

Genişletilmiş Kalman süzgeci ile ilgili bir dezavantaj gerçek zamanlı uygulamalar için hesaplama yükünün normal Kalman süzgecine kıyasla artmasıdır. Ayrıca doğrusallaştırma işlemi sonucu ortaya çıkan yaklaşıklık, kestirim işlemine belirsizlik katmaktadır. Buna rağmen genişletilmiş Kalman süzgeci, uygulama basitliği nedeniyle doğrusal olmayan dinamik sistemler için geliştirilmiş olan ve daha kesin sonuçlar verebilen diğer süzgeçlere (“Unscented” Kalman süzgeci, parçacık süzgeci, vb.) oranla daha çok tercih edilmektedir [6].

(1) ve (2)’de verilmiş olan Lojistik eşlem ve gürültülü gözlem işaretleri için genişletilmiş Kalman süzgeci denklemleri

$$\hat{s}^-(n+1) = r \hat{s}^-(n)(1 - \hat{s}^-(n)) \quad (6)$$

$$P^-(n+1) = A^2(n) P(n) \quad (7)$$

$$K(n+1) = P^-(n+1)(P^-(n+1) + R)^{-1} \quad (8)$$

$$\hat{s}^-(n+1) = \hat{s}^-(n+1) + K(n+1)(x(n) - \hat{s}^-(n+1)) \quad (9)$$

$$P(n+1) = (I - P^-(n+1)) K(n+1) \quad (10)$$

olarak yazılabilir, burada R ile gösterilen büyüklük (2) ile verilen beyaz gürültünün (ölçüm veya gözlem gürültüsü) kovaryansıdır. Doğrusallaştırmanın süzgeç denklemlerinde etkili olduğu bölüm (7) ile verilen eşitlikte ortaya çıkmaktadır. Burada

$$A(n) = r(1 - 2\hat{s}^-(n)) \quad (11)$$

olarak (1) eşitliğinin en son kestirim etrafındaki türevinden elde edilmektedir.

3.2. “Unscented” Kalman Süzgeci

Genişletilmiş Kalman süzgeci doğrusal olmayan sistemler için yaklaşık bir optimal çözüm olduğundan, farklı yaklaşımlar geliştirilmiş ve kullanılan yöntemin zayıf yönleri kuvvetlendirilerek daha yüksek performanslı bir algoritma oluşturulmuştur [6]. “Unscented” Kalman süzgeci ilk kez [7]’de önerilmiş, ve [8]’de de geliştirilmiştir. İki süzgeç arasındaki temel fark rasgele değişkenlerin sistem dinamiği içerisindeki yayılımında görülmektedir. Genişletilmiş Kalman süzgecinde rasgele değişkenler (Gauss rasgele değişkenleri) sistemin birinci derece doğrusallaştırılması yoluyla sistemin dinamiğine dahil olurken, “Unscented” Kalman süzgeci algoritmalarında rasgele değişkenler önceden belirlenmiş ve rasgele olmayan örnekleme noktalarıyla belirlenir (UT,

“Unscented” dönüşüm) ve sistemin kendi doğrusal olmayan dinamik denklemlerinde yayılır. Bu yayılımın ardından kestirilen durum değişkenlerinin ortalama ve kovaryans değerleri ikinci dereceden Taylor yaklaşımına uygun olarak daha doğru bir biçimde hesaplanmış olur. Birinci dereceden bir yaklaşım kullanan genişletilmiş Kalman süzgecinde ise ortalama ve kovaryans değerlerinde büyük hatalar oluşabilme ve bunun sonucunda optimal olmayan performanslar elde etme, hatta belli bir süreden sonra süzgecin performansında iraksamanın görülebilme riski vardır [6].

“Unscented” Kalman süzgecinin eşitlikleri ve “Unscented” dönüşümün (UT) ayrıntıları çeşitli kaynaklarda incelenmiştir [6-8].

4. Başarım Karşılaştırmaları

Kaotik işaretlerde gürültü süzülmesine ilişkin önceki bölümlerde anlatılan yöntemlerin benzeşim sonuçları iki şekilde karşılaştırılmıştır. Birincisinde her yöntem için ve farklı çatalanma parametrelerinde ilinti boyutunun ne kadar kestirilebildiği incelenmiş, ikincisinde ise işaret gürültü oranına göre ortalama karesel hatanın değişimi gösterilmiştir.

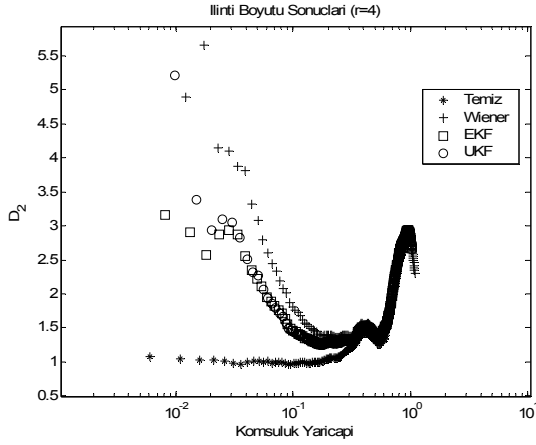
4.1. İlinti Boyutu Kestirimi

Kaotik sistemlerin değişmezlerinden biri olarak sayılan ilinti boyutu, (12) ile gösterilen ilinti fonksiyonunun yerel türevlerine karşılık gelmekte ve (13)’deki şekilde ifade edilmektedir [2]

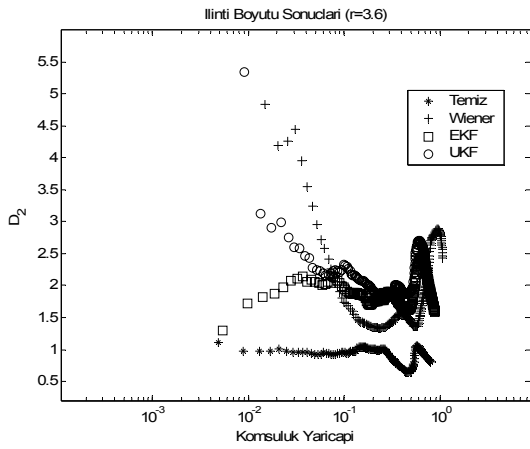
$$C(\varepsilon) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \theta(\varepsilon - |y(n) - y(k)|) \right] \quad (12)$$

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)}. \quad (13)$$

Yukarıdaki ifadede $y \in R^d$, gözlenen işaretin [10]’da belirtilen zaman gecikmeli gömme teoremine göre vektöre dönüştürülmesiyle elde edilmiştir. ε ise, d boyutlu uzaydaki yörüngeyi kapsayacak kürelerin yarıçapıdır ve komşuluk yarıçapı olarak adlandırılır. Denklem (13) ile verilen ilinti boyutu, kısıtlı bir komşuluk yarıçapında sabit kalan değere karşılık gelmektedir. İlinti boyutunun kestirimi, gösterilen yöntemlerin karşılaştırılmasında kullanılmıştır. Çatalanma parametresi sırasıyla 3.6 ve 4.0 iken ilinti boyutunu gösteren ilinti fonksiyonunun yerel eğimlerinin komşuluk menziline göre grafiği sırasıyla Şekil 1 ve Şekil 2’de gösterilmiştir. Kaotik işaretlerin değişmezlerinin değeri gürültü miktarına göre hızlı bir şekilde sapma gösterdiğinden, benzetimlerdeki işaret gürültü oranı 30 dB olarak alınmıştır. Sınırlı bir komşuluk yarıçapı menziline yerel eğimlerin sabit kaldığı aralığa denk gelen değer olan ilinti boyutu, çatalanma parametresi 4.0 iken genişletilmiş ve “Unscented” Kalman süzgeçlerinde hemen hemen aynı değerde olmuş ve Wiener süzgecinin başarımı daha geride kalmış; çatalanma parametresi 3.6 iken Wiener süzgeci ile her iki Kalman süzgecinden daha iyi boyut kestirimine ulaşılmıştır.



Şekil 1: İlinti boyutuna ilişkin benzetim sonuçları, $r = 4.0$.



Şekil 2: İlinti boyutuna ilişkin benzetim sonuçları, $r = 3.6$.

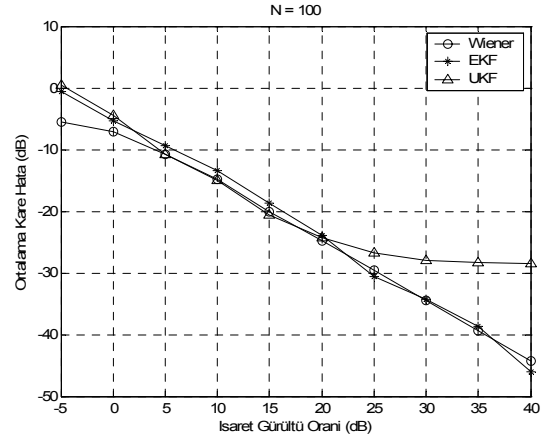
İlinti boyutuna ilişkin benzetimler tek gerçekleştirme üzerinden bulunmuştur ve MSE–SNR benzetimlerindeki gibi belli sayıdaki gerçekleştirimin ortalaması değildir. Bu yüzden her bir süzgeçleme yönteminin başarımı MSE’deki benzetimlerle birebir aynı olmayabilir. İstatistiksel olarak daha anlamlı sonuçlara ulaşmak için yukarıdaki ilinti boyutu benzetimlerinin belli sayıdaki gerçekleştirimin ortalaması alınarak tekrar bulunması planlanmaktadır.

4.2. Ortalama Karesel Hata (MSE) İşaret Gürültü Oranı (SNR) Benzeşimi

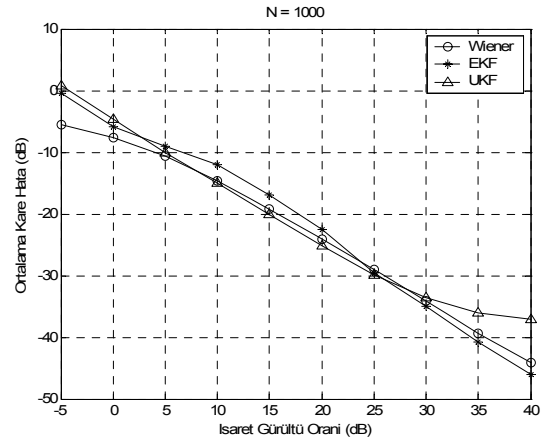
Belli bir işaret gürültü oranı için ortalama karesel hata denklemi (14) ile verilmiştir.

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (s(n) - \hat{s}(n))^2 \quad (14)$$

MSE–SNR benzetimleri çatallanma parametresi 3.6 ve 4.0 iken uygulanmış, farklı veri uzunluklarındaki başarımları incelenmiştir. Ek olarak, başarımlar benzetimleri her bir SNR için 20 gerçekleştirme üzerinden ortalama değerleri alınarak gösterilmiştir.



Şekil 3: MSE–SNR benzetim sonuçları, $r = 4.0$, $N = 100$.

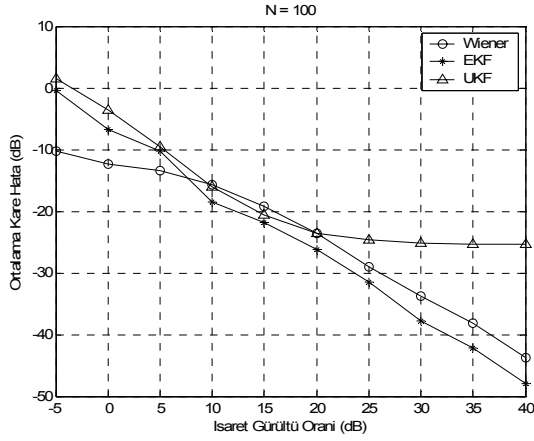


Şekil 4: MSE–SNR benzetim sonuçları, $r = 4.0$, $N = 1000$.

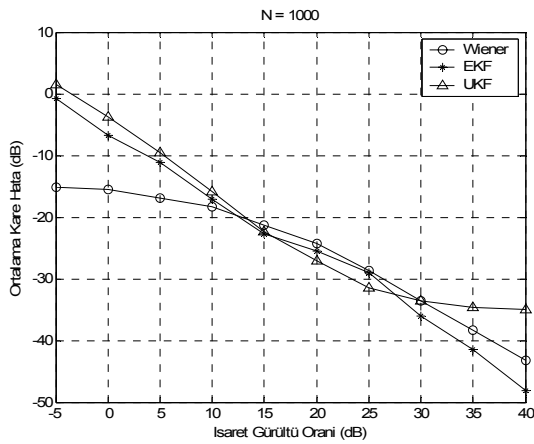
Çatallanma parametresinin 4.0 olduğu Şekil 3 ve Şekil 4’te, UKF süzgecinin veri uzunluğu azaldıkça yüksek SNR değerlerinde başarımının Wiener ve EKF’nin gerisinde kaldığı görülmektedir. Ayrıca 0 dB’den daha düşük SNR’larda veri uzunluğu azaldıkça Wiener süzgecinin daha düşük hata değerlerine sahip olduğu görülmüştür.

Ortalama karesel hatasının çatallanma parametresi 3.6 olduğu durumdaki benzetimleri artan veri uzunluğuna göre sırasıyla Şekil 5 ve Şekil 6’da gösterilmiştir. Bu parametre değerinde, UKF süzgecinin yüksek SNR değerlerinde başarımındaki düşüş daha çok göze çarpmaktadır. SNR’ın 0 dB’den daha küçük olduğu durumlarda Wiener süzgecinin başarımındaki artış belirgin olarak gözükmemektedir.

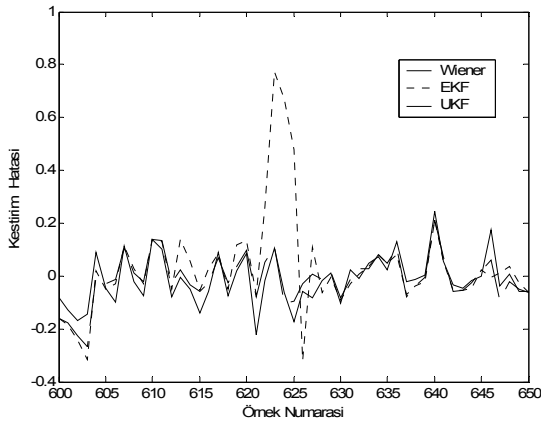
Şekil 7’de ise, kısa bir örnekleme aralığı için üç süzgecin kestirim hata değerleri görülmektedir. Buna göre, EKF süzgecinin ilişkin kestirim hatasında bazı ani sıçramalar yer almaktadır. Pek çok örnek numarası için EKF’deki hata miktarı diğer süzgeçlere göre fazla olmadığı halde, yüksek genlikli bu sıçramaların bir sonucu olarak EKF’nin ortalama kare hatası artmakta ve süzgecin performansı düşmektedir. Bu ani sıçramaların, EKF süzgecinin denklemlerindeki doğrusallaştırma için kullanılan türevden kaynaklandığı düşünülmektedir. Buna karşın, türev işlemi içermeyen UKF ve Wiener süzgeçlerinin hata eğrilerinde benzer ani sıçramalar gözlemlenmemiştir.



Şekil 5: MSE – SNR benzetim sonuçları, $r = 3.6$, $N = 100$.



Şekil 6: MSE – SNR benzetim sonuçları, $r = 3.6$, $N = 1000$.



Şekil 7: Kestirim hatasının örneklemeye göre değişimi.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada, kaotik davranış gösteren Lojistik eşlemine bulaşan beyaz gürültünün Wiener, genişletilmiş ve “unscented” Kalman süzgeçleri kullanılarak giderilmesi amaçlanmıştır. Yukarıdaki süzgeçlerin başarımları, farklı SNR değerlerine karşılık gelen ortalama karesel hata değerlerinin hesaplanması yoluyla karşılaştırılmıştır.

Genel olarak, her üç yöntemin de gürültüyü süzmede başarılı olduğu söylenebilir. Ancak yöntemlerden hangisinin

daha iyi başarımlar gösterdiği, işaretin SNR değerine bağlı olarak değişmektedir. Düşük SNR değerlerinde (≤ 0 dB) Wiener süzgecinin başarımlarının daha iyi olduğu, yüksek SNR değerlerinde ise (≥ 25 dB), UKF'nin diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında doyuma ulaştığı ve SNR arttıkça başarımlarında bir iyileşme olmadığı gözlemlenmiştir.

Ek olarak, ilinti boyutu sonuçları incelendiğinde, her üç yöntemin de yüksek bir SNR değeri (30 dB) için, kısıtlı bir komşuluk yarıçapında belli bir sapmayla boyut kestirimine imkân verdiği görülmüştür. Çatallanma parametresi $r = 4.0$ iken, Wiener süzgecinden kestirilen boyut değeri EKF ve UKF'nin gerisinde kalmış, $r = 3.6$ için de orijinal ilinti boyutuna daha yakın bir değer almıştır. Her iki parametre değeri için EKF ve UKF yöntemleriyle kestirilen boyut birbirine yakın değerler aldığı için, her iki Kalman süzgecinin benzer başarımlar sergilediği söylenebilmektedir.

Farklı işaret uzunluklarında süzgeçlerin başarımları karşılaştırılmıştır. Daha az veri kullanıldığında, Wiener süzgecinin, düşük SNR değerlerinde başarımları azalmıştır. Bu sonuç, Wiener süzgecinin tüm veriyi kullanarak “off-line” işlem yapmasından dolayı beklendiği gibidir. Kalman süzgeçleri ardışıl işlem yapıtlarından işaret uzunluğundaki düşme benzer bir başarımlar kaybına sebep olmamıştır.

6. Kaynakça

- [1] Sprott, J. C., *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press, 2003.
- [2] Abarbanel, H. I., *Analysis of Observed Chaotic Data*, Springer-Verlag, 1996.
- [3] Kantz, H. and Schreiber, T., *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, 1997.
- [4] Feng, J-Chao., Xie, S., "A noise reduction method for noisy contaminated chaotic signal", *Int. Conf. Comm Circuits and Systems*, vol.2, pp. 1173-1176, 2005.
- [5] Grewal, M. S., Andrews, A. P., *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons, 2001.
- [6] Haykin, S. (ed.), *Kalman Filtering and Neural Networks*. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- [7] Julier, S. J., Uhlmann, J. K., and Durrant-Whyte, H., "A new approach for filtering nonlinear systems," *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1628-1632, 1995.
- [8] Wan, E. A., van der Merwe, R., and Nelson, A. T., "Dual estimation and the unscented transformation," in *Advances in Neural Information Processing Systems*, Cambridge, MA: MIT Press, pp. 666-672, 2000.
- [9] Kay, S., *Fundamentals of Statistical Signal Processing - Estimation Theory*, Prentice Hall, 1993.
- [10] Takens, F., "Dynamical Systems and Turbulence", *Lecture Notes in Mathematics Vol:898*, Springer Verlag, 1981.